T.P. 7 : graphiques et un exemple de résol. num. d'E.D. (Euler)

1 Un peu de `plot` avec le module `matplotlib.pyplot`

Dans ce qui suit, on importera ce module avec l'abréviation standard `plt` autrement dit, on fera :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.1 Ce que fait la fonction `plot` :

Par défaut, pour deux *listes* `X` et `Y` (simples) `plot(X,Y)` va tracer des segments entre les points `(X[i],Y[i])` successifs.

Pour mieux comprendre, essayer :

```
X=[1,2,3]
Y=[3,2,4]
plt.plot(X,Y) # crée la courbe mais ne l'affiche pas
plt.show() # affiche la courbe
plt.savefig("essai-courbe.pdf",format='pdf')# fabrique un pdf si on veut
```

Ainsi pour les points $M_i = (x_i, y_i)$, `X` représente le tableau $[x_0, x_1, x_2]$ des abscisses et $Y = [y_0, y_1, y_2]$ le tableau des ordonnées.

1.2 Comment tracer un graphe de fonction ?

Par exemple on veut tracer le graphe de $x \mapsto x^2$ sur $[-3, 3]$ ou d'une autre fonction de notre choix. w a) Ecrire une fonction `subdivise(a,b,n)` qui prend en arguments deux flottants `a` et `b`, un entier `n` et qui renvoie une liste `python` qui contient les éléments de la subdivision régulière de $[a, b]$ en n segments, bornes comprises.

b) Ecrire une fonction `Mappage(f,X)` qui prend en argument une fonction `f` qui s'applique à des flottants, et un liste $\texttt{X} = [\texttt{x}_0, \dots, \texttt{x}_{\texttt{n-1}}]$ de flottants et renvoie la liste $[\texttt{f}(\texttt{x}_0), \dots, \texttt{f}(\texttt{x}_{\texttt{n-1}})]$.

c) En déduire une fonction `Trace(f,a,b,n)` qui trace le graphe d'une fonction `f` sur un intervalle `[a,b]` comme une ligne polygonale obtenue en reliant les valeurs de $(x_i, f(x_i))$ pour la subdivision régulière de $[a, b]$ en n segments.

d) Essayer votre fonction `Trace` sur la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[-3, 3]$, sur la fonction `sin` sur $[0, \pi]$ (avec `math` pour avoir `sin` et `pi`). Quelle valeur de `n` suffit-elle pour avoir un rendu assez lisse à votre goût ?

On utilisera `plt.clf()` pour *clear figure* pour effacer le graphique avant le `plot` suivant

2 La méthode d'Euler pour la résolution des E.D (première approche)

2.1 Une forme très générale pour les E.D. du premier ordre normalisées

On peut écrire une E.D. du premier ordre sous la forme générale

$$y'(x) = F(x, y(x)),$$

où F est une fonction de deux variables. Ceci est beaucoup plus général que les seules E.D.L. du premier ordre que nous avons vues en cours. Pour une E.D.L. du premier ordre normalisée :

$$y'(x) = -a(x)y(x) + b(x)$$

définie sur un intervalle I, on peut l'écrire sous la forme précédente en posant $F(x, u) = -a(x)u + b(x)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $x \in I$.

2.2 Le principe de la méthode d'Euler et test positif !

Cadre général : On fixe un problème de Cauchy :

$$y'(x) = F(x, y(x)), \text{ avec la C.I. } y(x_0) = y_0$$

Autrement dit, on se donne la fonction F, et le couple (x_0, y_0).

Notre exemple : on prendra l'E.D. très simple $y'(x) = x.y(x)$, pour la C.I. $y(0) = 1$. Autrement dit, $(x_0, y_0) = (0, 1)$ et $F : (x, u) \mapsto x.u$.

Retour à la théorie générale : On suppose que la fonction F est telle qu'il y ait une et une seule fonction solution à l'E.D. pour la condition initiale $y(x_0) = y_0$ (il y a des conditions pour cela, cf. cours de 2ème année).

Le principe de la méthode d'Euler est le suivant : sur un petit intervalle $[x_0, x_0 + p]$ où p s'appelle le pas, et p est pris *petit*, on va approcher la fonction solution y qu'on ne connaît pas par la fonction affine définissant la tangente au graphe de y, au point d'abscisse x_0, autrement dit par $z_0 : x \mapsto y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$.

L'essentiel : on connaît $y'(x_0) = F(x_0, y_0)$.

En notant $M_0 = (x_0, y_0)$, on considère alors le segment $[M_0, M_1]$ sur le graphe de la fonction affine z_0 où $M_1 = (x_1, y_1)$ est le point d'abscisse $x_1 = x_0 + p$.

Ensuite, au point $M_1 = (x_1, y_1)$ on considère le segment partant de M_1 et de pente cette fois $F(x_1, y_1)$. [1].

On poursuit ce segment jusqu'au point M_2 d'abscisse $x_0 + 2p$.

En itérant ce procédé, on obtient une courbe continue qui est une succession de segments $[M_k, M_{k+1}]$ avec $M_k = (x_k, y_k)$, et dont on espère qu'elle n'est pas trop loin de la solution y de l'E.D.

Question 1 – Donner la formule de récurrence donnant y_{k+1} en fonction de y_k et x_k pour chaque k.

Remarquer que la formule obtenue revient seulement algébriquement, dans l'E.D., à remplacer la dérivée $y'(x)$ par un taux de variation !

Question 2 – Ecrire une fonction PYTHON qui prend comme argument `F,p,x0,y0,n` où `n` est le nombre de points qu'on veut tracer et tracer la solution approchée au pb. de Cauchy correspondant avec la méthode d'Euler.

Question 3 – On la testera sur l'exemple donné ci-dessus, en traçant sur le même graphe la solution « exacte ».

3 Trois exemples de problèmes de Cauchy « difficiles » :

3.1 Un pb de Cauchy mal posé :

On considère l'E.D. non linéaire : $y' = 2\sqrt{|y|}$

On constate que la fonction nulle est bien solution, mais aussi pour tout $a \in \mathbb{R}$ la fonction $y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ (x-a)^2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$.

a) tracer le graphe de ces fonctions définies par cas avec Python, pour $a = 0, 1, 2, 3$.

b) Y-a-t-il unicité de la solution au pb. de Cauchy $\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$?

On dit que ce problème de Cauchy est « mathématiquement mal posé »

c) Tracer les solutions obtenues par la méthode d'Euler pour cette E.D. avec la C.I. $y(0) = 0$ puis avec $y(0) = 0.1$, $y(0) = 0.01$, $y(0) = 0.001$. Expliquer pourquoi on peut en déduire une sorte de *discontinuité* du comportement numérique des solutions par rapport à la variation de la C.I.

3.2 Un problème mathématiquement bien posé, mais numériquement mal posé

Définition (vague) On dit qu'un problème de Cauchy est numériquement bien posé si la continuité de la solution par rapport à la donnée initiale est « suffisamment bonne » pour que la solution ne soit pas perturbée par une erreur initiale ou des erreurs d'arrondi faibles.

Exemple : on considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(x) = 3y(x) - 1, \ x \in [0, 10], \\ y(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

1. *Cette pente est celle de la tangente au graphe de la solution de l'E.D. qui passerait par M_1*

a) Y-a-t-il existence et unicité d'une solution à ce problème de Cauchy ? Si oui expliciter cette solution y.

b) On remplace la C.I. $y(0) = 1/3$ par la C.I. $\tilde{y}(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$. Expliciter la solution $\tilde{y}$ correspondante.

c) Calculer la différence entre $\tilde{y}(10)$ et $y(10)$. Commenter le résultat obtenu.

d) tracer y et $\tilde{y}$ pour $\varepsilon = 10^{-5}$.

e) A partir de quelle valeur de ε peut-on considérer que $\tilde{y}$ approche y à 10^{-1} près sur $[0,10]$?

3.3 Un problème de pas

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(x) = -150y(x) + 30, \ x \in [0,1], \\ y(0) = 1/5. \end{cases}$

a) Calculer la solution exacte de ce problème de Cauchy. Calculer la solution $\tilde{y}$ au même problème de Cauchy où l'on remplace la C.I. par $\tilde{y}(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$.

b) Justifier que $\forall\, x \in [0,1]$, $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \varepsilon$ et donc que le problème de Cauchy est *numériquement bien posé* au sens du paragraphe précédent.

c) Tester numériquement la résolution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(x) = -150y(x) + 30, \ x \in [0,1], \\ y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon \end{cases}$ avec $\varepsilon = 0.1$ et un pas $p = 1/50$. Que constatez vous ? Expliciter notamment la valeur de $y(1)$ trouvée.

d) Explication du phénomène précédent : comme à la question précédente, on résout le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(x) = -150y(x) + 30, \ x \in [0,1], \\ y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon. \end{cases}$ avec la méthode d'Euler à pas constant p. On note $y_0 = \frac{1}{5} + \varepsilon$ et y_n la n-ième valeur obtenue par cette méthode.
Montrer que $y_n - \frac{1}{5} = (1 - 150p)^n \left(y_0 - \frac{1}{5}\right)$.
Retrouver alors l'observation faite à la question précédente pour $p = 1/50$.
En déduire quelle valeur du pas on doit prendre pour $|y_n|$ ne tende pas vers l'infini avec n.

4 Bonus pour ceux qui ont fini avant

a) Pour le problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 : $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y'(x) = 3\dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{5}{x^3} \end{cases}$ tracer la solution obtenue par la méthode d'Euler sur $[1,5]$ avec un pas de 0.1. Tracer sur la même courbe la solution exacte. Expliquer pourquoi les solutions s'écartent si vite, grâce à la formule donnant toutes les solutions de $y'(x) = 3\dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{5}{x^3}$ (sans C.I. prescrite).

Quel est le phénomène en cause parmi les trois cités au paragraphe précédents ? (Mathématiquement mal posé, numériquement mal posé, ou bien mal conditionné).

b) On considère à présent le problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 : $\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(x) = 100(\sin(x) - y(x)) \end{cases}$ dont la solution est $y : x \mapsto \dfrac{1}{10001}(-100\cos(x) + 10000\sin(x) + 100\exp(-100x))$.

(i) Tracer sur la même courbe cette solution exacte y et la solution obtenue par la méthode d'Euler avec un pas de $0,02$ sur l'intervalle $[0,10]$.

(ii) Même question avec un pas de $0,0201$: puis un pas de $0,0202$ joli non ? Commentez !

(iii) Comprendre ce phénomène mathématiquement.