Notion de morphisme

Exercice 1 (Un goût de déjà vu ?)**.**
a) Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ qui sont dérivables.
b) Sachant que $\exp\,:\,(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^{+*},\times)$ est un isomorphisme, sachant aussi que la composée de deux morphismes est un morphisme, déduire du a), sans calcul supplémentaires, la forme de *tous* les morphismes dérivables de $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ dans $(\mathbb{R}^{+*},\times)$.
c) Un peu d'analyse pour les vacances : montrer, en intégrant par rapport à une variable, que si f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ qui est continu sur $\mathbb{R}$, alors f est forcément *dérivable.* Ainsi les résultats du a) et du b) se généralisent avec l'hyp. « continu » plus faible que « dérivable ».

Exercice 2. Montrer que les seuls morphismes de corps de $\mathbb{C}\to\ \mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ est l'identité sont l'identité et la conjugaison. *Indication* – Si f est un tel morphisme, que dire de $f(a+ib)$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, puis que dire de $f(i)$?

Exercice 3. Montrer que si $f\,:\,\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ est un morphisme de corps alors $f=id_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 4 (Corps obtenu si on veut rajouter à $\mathbb{Q}$ un élément)**.** a) Montrer que tout sous-corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$.
b) On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et que c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contient $\sqrt{2}$.
c) Inspiré par l'exercice précédent, déterminer tous les morphismes de corps de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dans lui-même.

Révisions Module et argument, interprétations géométriques

Du point de vue géométrique, $|a-b|$ *est la distance* AB*. Du point de vue algébrique,* $|z|^2=z\overline{z}$ *est très utile ! L'écriture* $z=a+ib$ *n'est à utiliser qu'en dernière extremité.*

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ vérifiant les deux conditions : $\begin{cases}|z+1|\le 1,\\ |z-1|\le 1.\end{cases}$

Exercice 6. a) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z-(1+i)|\le 1\Rightarrow\sqrt{10}-1\le|z-4|\le\sqrt{10}+1$.
b) Traduire géométriquement le résultat du a) comme une propriété du disque fermé de centre $(1+i)$ et de rayon 1.

Exercice 7. Soit a et b deux complexes. Montrer qu'on a l'égalité $|a+b|=|a|-|b|$ ssi $b=ta$ avec $t\in[-1,0]$.

Exercice 8. Soit $a\in\mathbb{C}$.
a) Montrer que si $|z|=1$ alors $|z-a|=|1-\overline{a}z|$.
b) Montrer que si $|z|<1$ et si $|a|<1$ alors $|z-a|<|1-\overline{a}z|$

Exercice 9. Soit A,B,C,D quatre points du plan euclidien.
Montrer que :

$$AC.BD\le AB.CD+AD.BC$$

Indication : On pourra travailler dans un repère d'origine A et se ramener à une I.T.

Exercice 10. Déterminer explicitement $\{z\in\ \mathbb{C}\,|\,\exists t\ \in\mathbb{R},\ z=\frac{1+it}{1-it}\}$ où i est le nombre complexe bien connu.
On justifiera soigneusement l'égalité des deux ensembles en question : celui de l'énoncé, et celui que vous proposerez comme ensemble explicite.

Exercice 11. Soit $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\{1\}$. Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|=1$.

Exercice 12 (Pour $z\in\mathbb{U}$, $1/z=\overline{z}$)**.** Soit $(a,b,c)\in\mathbb{U}^3$. Montrer que $|a+b+c|=|ab+bc+ca|$.

Exercice 13. Déterminer la forme géométrique de l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$, tels que $|(1+i)\overline{z}-2i|=|iz\sqrt{2}|$.