Exercice 1. a) (Résultat cité à propos du crible d'Eratosthène). Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et $n \notin \mathbb{P}$, montrer qu'il a toujours un facteur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

b) Montrer que si le plus petit facteur premier p d'un nombre n est strictement plus grand que $\sqrt[3]{n}$ alors ou bien n est premier ou bien n est le produit de deux nombres premiers.

Exercice 2. a) En adaptant la preuve d'Euclide, et en considérant $A = 4(\prod_{i=1}^{n} p_i) - 1$ montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.
Remarque – Il est aussi vrai, mais cela demande un argument supplémentaire, qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

b) Adapter encore cette preuve pour montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 6.

Exercice 3 (Nombres premiers et divisibilité des binomiaux)**.**

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n = \{p \in \mathbb{P},\ p \leq n\}$.

   i) Soit $n = 2k+1$ un entier impair. Justifier que pour tout nombre premier p tel que $k+2 \leq p \leq 2k+1$, p divise $\binom{2k+1}{k}$.

   ii) En déduire que si on note N le produit des nombres premiers p tels que $k+2 \leq p \leq 2k+1$, on a $N \leq \binom{2k+1}{k}$.

c) Déduire de ce qui précède que $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p < 4^n$.

Exercice 4. a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, $a^2 | b^2 \Leftrightarrow a\ | b$.

b) Montrer que si $a \wedge b = 1$ et $ab = c^n$ (avec a, b, c dans $\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$) alors il existe a_1, b_1 tels que $a = a_1^n$ et $b = b_1^n$.

c) Montrer que si a, b, m, n dans $\mathbb{N}^*$ vérifient $a^m = b^n$ et $m \wedge n = 1$ alors $\exists\, c\ \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^n$ et $b = c^m$.

Exercice 5. Soit $p \in \mathbb{P}$ et $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a^2 - b^2 = p$. Déterminer a et b.

Exercice 6. Soit $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que si $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Montrer que

a) $\log_{10}(2)$ est irrationnel,

b) plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, $\log_{10}(n)$ est soit entier, soit irrationnel.

c) Pour quelle valeurs de a, la méthode précédente s'applique-t-elle pour montrer que $\log_a(n)$ est entier ou irrationnel ?

Exercice 8. Je suis un carré parfait à 4 chiffres dont chacun des chiffres est inférieur à 6. En rajoutant 3 à chacun de mes chiffres, on obtient encore un carré parfait, qui suis-je ?

Exercice 9 (Mersenne et parfait)**.** Soient $n \geq 2$ et $a \geq 2$ des entiers.

a) Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier. On appelle nombre de Mersenne les $M_p = 2^p - 1$ avec p premier.

Culturel : ces nombres sont importants car on dispose d'un bon test pour savoir si M_p est premier. Le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne : en 2018 $M_{82\,589\,933}$.

b) Un nombre entier naturel est dit parfait s'il est la somme de ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ excepté lui-même. Par exemple 6 est parfait : $6 = 1 + 2 + 3$.

Montrer que si $2^{n+1} - 1$ est un nombre premier alors $2^n(2^{n+1} - 1)$ est parfait.

Culturel : Ce résultat est déjà dans les éléments d'Euclide. La récip. est vraie : un nombre parfait pair est toujours de la forme précédente, c'est un résultat dû à Euler, qui ferait un autre exercice.

Exercice 10.

a) Résoudre l'équation $x^2 + \overline{24}x + \overline{1} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/53\mathbb{Z}$.

b) Résoudre l'équation $x^2 + 6x - 13 = 0$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Déterminer *le nombre* de solutions de l'équation $x^2 = \bar{1}$, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:
a) pour $n = 89$, b) pour $n = 49$, c) pour $n = 300$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $42 | (n^{13} - n)$.