Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de n le nombre $n^2 - 3n + 6$ est-il divisible par 5 ?

Exercice 2. Donner le reste de la division euclidienne de 10^{10^n} par 7.

Exercice 3. Donner un C.N.S. de divisibilité par 11 analogue à celle vue en cours pour la divisibilité par 9.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a(a^{2n} - 1)$ est divisible par 6.

Exercice 5. Montrer que si p premier, $p \geq 5$, alors $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 6. a) Soit a, x, y des entiers. Montrer que, si $x^2 + y^2 = 3a$ alors $x \equiv 0\ [3]$ et $y \equiv 0\ [3]$.
b) Montrer que l'équation $x^2 + y^2 = 750000$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Chercher les solutions dans $\mathbb{Z}$ aux équations : (i) $2x^2 + 7y^2 = 3$,
(ii) $x^2 + y^2 - 8z - 6 = 0$.

Exercice 8. Un dragon a 100 têtes. D'un coup d'épée, un chevalier peut couper resp. $15, 17, 20$ ou 5 têtes, ce qui provoque (s'il lui reste au moins une tête) respectivement la création de $24, 2, 14$ ou 17 nouvelles têtes. Pour que le dragon meure, il faut et il suffit qu'il n'ait plus de tête. Le chevalier peut-il ainsi tuer le dragon ?
N.B. *Pour que le chevalier puisse tuer le dragon, il faut et il suffit qu'à un moment, le nombre de têtes du dragon avant qu'il ne frappe soit* $15, 17, 20$ *ou* 5

Exercice 9. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \neq b$. Considérons les divisions euclidiennes de a (resp. b) par $a - b$ qu'on note resp. : $\begin{cases} a = (a-b)q_a + r_a, \\ b = (a-b)q_b + r_b. \end{cases}$ avec $0 \leq r_a < |b - a|$ et $0 \leq r_b < |b - a|$.
Trouver une relation entre r_a et r_b d'une part et entre q_a et q_b d'autre part.

Exercice 10. Si $a \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{ppcm}(a, 14) = 42$, quelles sont les valeurs que peut prendre a ?

Exercice 11 (Résultat de cours : caract. du pgcd/ppcm en se ramenant au cas premierzentreux)**.**
Soient $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$. On note $a \wedge b = pgcd(a, b)$.
a) Démontrer que $d = a \wedge b$ équivaut à : $d \geq 0$ et $\exists\, (a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a = a_1 d & (1) \\ b = b_1 d & (2) \\ a_1 \wedge b_1 = 1 & (3) \end{cases}$
b) Vérifier que $m = ppcm(a, b)$ équivaut à : $\exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, $m = \alpha a$, $m = \beta b$ et $\alpha \wedge \beta = 1$.

Exercice 12 (Résultats de cours sur pgcd)**.** Montrer que : a) Si pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $b \wedge a_i = 1$ alors b est premier avec le produit, i.e. $b \wedge (a_1 \ldots a_n) = 1$.
b)Si $c|a$ et $c|b$ alors pour tout $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, $c|(ak + bl)$.
c) Si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge (a + b) = 1$.
d) Si $a \wedge b = 1$, alors ab et $a + b$ sont premiers entre eux.
e) Si $b_1, \ldots, b_n$ sont *deux à deux* premiers entre eux, et a est divisible par chaque b_i alors a est divisible par le produit $b_1 \ldots b_n$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $(3n + 2) \wedge (7n - 5)$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$.

Exercice 15. a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$, $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n$.
b) Montrer que pour tout $n \in\ \mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \wedge b_n = 1$.

Exercice 16 (Equation diophantienne linéaire)**.** a) Déterminer les points à coordonnées entières sur les droites d'équations : $30x - 57y = 6$, $30x - 57y = 3$, $24x + 17y = 1$.
b) Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $8(a \vee b) = 105(a \wedge b) + 30$.

Exercice 17. Soit $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $Q = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ deux points distincts de $\mathbb{Z}^n$.
a) Montrer l'équivalence entre les deux conditions suivantes :
(i) Les $b_i - a_i$ sont premiers entre eux dans leur ensemble,
(ii) il n'existe pas de point de $\mathbb{Z}^n$ dans l'intervalle $]P, Q[\subset \mathbb{R}^n$ (si cette condition est réalisée, on dit que Q est visible depuis P, en pensant que les points à coordonnées entières sont ceux qui « obstruent la vue ».)
Remarque – on peut supposer sans restriction de généralité que $P = (0, \ldots, 0)$.
b) On prend $n = 2$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe un carré de $\mathbb{Z}^2$, i.e. une partie du type $[[a + 1, a + r]] \times [[b + 1, b + r]]$ dont tous les points sont invisibles de l'origine.