

Exercice 1. Soit $*$ la loi de composition interne définie dans \mathbb{R} par

$$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Est-ce que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe ?

Exercice 2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, on note $f_{a,\varepsilon}$ l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_{a,\varepsilon}(x, y) = (x + a, \varepsilon y)$.

On note $G = \{f_{a,\varepsilon}, (a, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \{-1, 1\}\}$.

- Montrer que (G, \circ) est un groupe abélien.
- Interpréter géométriquement les éléments de G .

Exercice 3 (Le lemme de Raphaël D. : Un neutre à gauche et un neutre à droite ? Ils coïncident).

Soit (E, \cdot) un ensemble muni d'une l.c.i. On suppose qu'on a deux éléments e_1 et e_2 de E tels que :

- e_1 est neutre à droite de (E, \cdot) i.e. $\forall x \in E, x.e_1 = x$
- e_2 est neutre à gauche de (E, \cdot) i.e. $\forall x \in E, e_2.x = x$

Montrer que $e_1 = e_2$ et donc que (E, \cdot) admet un élément neutre.

Exercice 4. Soit (E, \cdot) un ensemble muni d'une l.c.i associative avec neutre. Soit $(a, b) \in E^2$.

- Montrer que si $a.b$ et $b.a$ ont chacun un symétrique alors a et b aussi.
- Donner un exemple où $a.b$ admet un symétrique sans que ce soit le cas pour a et b .

Exercice 5 (Résultat de cours, important). Soit (E, \cdot) un ensemble muni d'une l.c.i. associative avec neutre. Soit a et b dans E ayant chacun un symétrique dans (E, \cdot) qu'on note a^{-1}, b^{-1} . Montrer que $a.b$ admet un symétrique dans E et exprimer $(a.b)^{-1}$ à l'aide de a^{-1} et b^{-1} .

Exercice 6. Soit (E, \cdot) un ensemble muni d'une l.c.i associative avec neutre noté e . Montrer que si $a \in E$ admet un symétrique à droite a_1 tel que $a.a_1 = e$ et un symétrique à gauche a_2 tel que $a_2.a = e$ alors $a_1 = a_2$ et donc a admet cet élément comme vrai symétrique.

Exercice 7. a) Démontrer la propriété suivante donnée en cours : si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de $(G, *)$ alors $H_1 \cap H_2$ est sous-groupe de $(G, *)$.

b) Soit (G, \cdot) un groupe. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de G tels que l'un ne soit pas inclus dans l'autre. Montrer qu'alors $H_1 \cup H_2$ n'est *jamais* un sous-groupe de (G, \cdot) .

Exercice 8 (résultat de cours). Soit (G, \cdot) un groupe et $H \subset G$.

Montrer l'équivalence entre la déf. de " H sous-groupe de (G, \cdot) " et la caract. : " H est non vide et $\forall (a, b) \in H^2, a.b^{-1} \in H$ ".

Exercice 9 (Jouons avec les axiomes d'anneau). Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note 0 le neutre pour $+$ et 1 le neutre pour \times .

a) Montrer que $\forall a \in A, a \times 0 = 0 \times a = 0$. (On dit que 0 est élément *absorbant* pour la multiplication).

b) Pour tout élément $x \in A$, on note $-x$ le symétrique de x pour $+$ (appelé opposé de x).

Montrer que $\forall (a, b) \in A^2, -(a \times b) = (-a) \times b$.

Remarque : La motivation de cet exercice est de faire comprendre qu'à l'aide des seules propriétés données dans la déf. d'un anneau, on retrouve d'autres propriétés "naturelles" du calcul avec $+$ et \times aux quelles nous sommes habitués dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$ par exemple

Exercice 10. Un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est *intègre* ssi $\forall (a, b) \in A^2, ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

- Montrer qu'un corps est toujours un anneau intègre.
- Donner un exemple d'anneau intègre qui n'est pas un corps.
- Montrer que l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ n'est pas intègre.

Exercice 11. Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\forall a \in A, a^2 = a$. (On dit que A est un anneau de Boole)

- Montrer que $\forall a \in A, -a = a$.
- Montrer que A est nécessairement commutatif.
- Vérifier que si E est un ensemble non vide, $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ possède une telle structure d'anneau.
- Montrer qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.