

D.M. 7 : E.D. d'ordre 2 dans un cadre plus abstrait, solutions

Partie I : Utilisation abstraite de la M.V.C.

I. 1) La M.V.C. permet, comme pour le premier ordre, de majorer des solutions

Idée importante : lorsqu'on a une propriété du second membre φ d'une E.D. $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \varphi(x)$ la M.V.C. permet d'écrire les solutions y de cette équation en fonction de φ et donc d'en déduire une propriété de y .

Soit (E) l'E.D. $y'' - 2y' + 2y = f$, on va résoudre cette E.D. par la M.V.C.

On sait que les solutions de l'E.D. homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto \lambda_1 e^x \cos(x) + \lambda_2(x) e^x \sin(x)$ car l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$ de solutions $r = 1 \pm i$.

Par la M.V.C. on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x)$ en notant $y_1(x) = e^x \cos(x)$ et $y_2(x) = e^x \sin(x)$ et en posant la condition $z_1 y_1' + z_2 y_2' = 0$.

Ainsi (z_1', z_2') sont solutions du système $(S) \quad \begin{cases} z_1 y_1' + z_2 y_2' = 0 \\ z_1' y_1 + z_2' y_2 = f \end{cases}$

Ici $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(x) \cos(x) + z_2'(x) \sin(x) = 0 \\ z_1'(x)(\cos(x) - \sin(x)) + z_2'(x)(\sin(x) + \cos(x)) = f(x) \end{cases}$

On en déduit, par exemple avec les formules de Cramer, que $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(x) = -e^{-x} f(x) \sin(x) \\ z_2'(x) = e^{-x} f(x) \cos(x) \end{cases}$.

Par intégration, on peut *choisir* comme solution particulière : $y_p(x) = e^x \cos(x) \left(- \int_0^x e^{-t} f(t) \sin(t) dt \right) + e^x \sin(x) \left(\int_0^x e^{-t} f(t) \cos(t) dt \right)$.

Par théorème, la forme générale des solutions de (E) est $y = y_p + y_h$.

Donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $x \geq 0$,

$$y(x) = e^x \cos(x) \left(\lambda_1 - \int_0^x e^{-t} f(t) \sin(t) dt \right) + e^x \sin(x) \left(\lambda_2 + \int_0^x e^{-t} f(t) \cos(t) dt \right).$$

On va en déduire une majoration de $|y(x)|$ à partir de celle de $|f(x)|$

En effet à partir de l'égalité précédente, par I.T. (et I.T. pour les intégrales, avec $x \geq 0$) :

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq |e^x| \cdot |\cos(x)| \left(|\lambda_1| + \int_0^x |e^{-t}| \cdot |f(t)| |\sin(t)| dt \right) + |e^x| |\sin(x)| \left(|\lambda_2| + \int_0^x |e^{-t}| \cdot |f(t)| |\cos(t)| dt \right), \\ &\leq e^x \left(|\lambda_1| + \int_0^x e^{-t} |f(t)| dt \right) + e^x \left(|\lambda_2| + \int_0^x e^{-t} |f(t)| dt \right) = e^x \left(|\lambda_1| + |\lambda_2| + 2 \int_0^x e^{-t} |f(t)| dt \right) \end{aligned}$$

en enlevant les v. abs. inutiles et majorant $|\sin|$ et $|\cos|$ par 1.

En utilisant maintenant la majoration de l'énoncé, qui donne un contrôle de la taille de f (« ne croît pas plus vite qu'une exponentielle ») on obtient :

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq e^x \left(|\lambda_1| + |\lambda_2| + 2A \int_0^x e^{-t} \cdot e^{ct} dt \right) = e^x \left(|\lambda_1| + |\lambda_2| + 2A \frac{1}{-1+c} [e^{(-1+c)t}]_0^x \right) \\ &\leq e^x \left(|\lambda_1| + |\lambda_2| - \frac{2A}{c-1} + \frac{2A}{c-1} e^{(c-1)x} \right) \\ &\leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|) e^x + \frac{2A}{c-1} e^{cx} \\ &\leq (|\lambda_1| + |\lambda_2|) e^{cx} + \frac{2A}{c-1} e^{cx} \quad \text{car } c > 1 \text{ donc } e^x \leq e^{cx} \\ &\leq B e^{cx} \end{aligned}$$

avec $B = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \frac{2A}{c-1}$ ce qui donne la conclusion : y ne croît pas plus vite qu'une exp.

I. 2. Début commun pour les deux solutions proposées :

Première étape commune aux deux solutions proposées :
considérer les fonctions différences pour ramener hyp. et concl. à de la positivité!

Notons $f = f_2 - f_1$ et $g = g_2 - g_1$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et $f'' - a^2 f = g$.
Les hyp. sont alors $g \geq 0$, $f(0) = f'(0) = 0$. La concl. cherchée est $f \geq 0$.

M1 avec la MVC : ressemble à la solution du I.1) Notons $f = f_2 - f_1$ et $g = g_2 - g_1$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et $f'' - a^2 f = g$.

On va calculer f en fonction de g à l'aide de la M.V.C.

Pour l'E.D. $y'' - a^2 y = g$ (E) les sol. de l'E.D. S.S.M. sont de la forme $y(x) = \lambda e^{ax} + \mu e^{-ax}$.

On cherche une sol. part. $y_p(x) = z_1(x)e^{ax} + z_2(x)e^{-ax}$ par la méthode de variation des constantes.

On résout alors le système
$$\begin{cases} z_1'(x)e^{ax} + z_2'(x)e^{-ax} = 0, \\ z_1'(x)ae^{ax} - z_2'(x)ae^{-ax} = g(x). \end{cases}$$

On obtient $z_1'(x) = \frac{1}{2a}e^{-ax}g(x)$ et $z_2'(x) = -\frac{1}{2a}e^{ax}g(x)$.

Donc comme f vérifie (E), il existe des constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{e^{ax}}{2a} \int_0^x e^{-at}g(t)dt - \frac{e^{-ax}}{2a} \int_0^x e^{at}g(t)dt + \lambda e^{ax} + \mu e^{-ax}.$$

La condition $f(0) = 0$ donne que $\lambda + \mu = 0$.

On calcule $f'(x) = \frac{1}{2}e^{ax} \int_0^x e^{-at}g(t)dt + \frac{g(x)}{2a} + \frac{e^{-ax}}{a} \int_0^x e^{at}g(t)dt - \frac{g(x)}{2a} + a\lambda e^{ax} - a\mu e^{-ax}$.

Donc $f'(0) = a(\lambda - \mu)$.

Donc la condition $f'(0) = 0$ donne $\lambda - \mu = 0$.

Au total $\lambda = \mu = 0$ et

$$\forall x \geq 0, f(x) = \frac{e^{ax}}{2a} \int_0^x e^{-at}g(t)dt - \frac{e^{-ax}}{2a} \int_0^x e^{at}g(t)dt$$

On veut conclure que $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{Or } f(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \text{sh}(a(x-t))g(t)dt.$$

Comme pour tout $t \in [0, x]$, $a(x-t) \geq 0$ on a $\text{sh}(a(x-t)) \geq 0$ et p. hyp. $g \geq 0$ d'où la conclusion. $\square$

M2 : qui ressemble plus à la réduction de l'ordre et à l'exercice de la planche sur le premier ordre :

En posant $f = f_2 - f_1$ et $g = g_2 - g_1$, on a $f'' - a^2 f \geq 0$.

Posons $h(x) = e^{-ax}(f_1(x) - f_2(x))$. On a donc $f_1(x) - f_2(x) = e^{ax}h(x)$.

Donc $(f_1 - f_2)'(x) = e^{ax}(h'(x) + ah(x))$ et $(f_1 - f_2)''(x) = e^{ax}(h''(x) + 2ah'(x) + a^2h(x))e^{ax}$.

Ainsi (1) équivaut à :

$$h''(x) + 2ah'(x) \leq 0. \quad (2)$$

On est ramené à une inéquation différentielle du premier ordre pour la fonction h' , et cela, on sait faire...

Posons $k(x) = e^{2ax}h'(x)$. Alors (2) équivaut à :

$$k'(x) \leq 0 \quad (3)$$

Or $k(0) = h'(0)$ et $h'(0) = e^0((f_1 - f_2)'(0) - a(f_1 - f_2)(0)) = 0$, donc $k(0) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ k(x) \leq 0$.

Donc par déf. de k , $\forall x \in \mathbb{R}^+ h'(x) \leq 0$.

Or $h(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, h(x) \leq 0$ i.e. $f_1(x) \leq f_2(x)$. $\square$

II. 1) Cas où $q < 0$ sur $\mathbb{R}$: le cas « hyperbolique »¹

- a) i) Montrer que pour tout solution $t \mapsto y(t)$ de (E) , la fonction y^2 est convexe.

Soit y une solution de (E) . Comme y^2 est deux fois dérivable, on montre qu'elle est convexe en étudiant sa dérivée seconde.

Or $(y^2(t))' = 2y'(t)y(t)$ et donc $(y^2(t))'' = 2y''(t)y(t) + 2y'(t)^2$ (1).

Et $y''(t) = -q(t)y(t)$, donc $y''(t)y(t) = -q(t)y(t)^2 > 0$ (2) d'où par (1) et (2), $(y^2(t))'' \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et la conclusion.

- ii) En déduire que la seule solution de (E) qui est bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

Si y est une solution bornée, alors y^2 est bornée sur $\mathbb{R}$. Donc par a), elle est convexe et bornée, or :

Lemme : une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Application du lemme ici :

Donc y^2 est constante. Si on note k cette constante, on a alors $\forall t \in I$, $y(t) = +\sqrt{k}$ ou $y(t) = -\sqrt{k}$. Mais par T.V.I. on en déduit que y est constante. Or la seule fonction constante solution de (E) est la fonction nulle. $\square$

Démonstration du lemme : Dans le cas dérivable², si elle est non constante, elle a une tangente de pente non nulle, et Γ_f reste au dessus de cette tangente, donc si la pente est positive, la fonction tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et si la pente est négative, la fonction tend vers $-\infty$ en $-\infty$ par minoration.

- b) (M1) avec l'intégrale donnée par l'énoncé : Le nombre donné par l'énoncé, à savoir $\int_a^b q(x)y(x)^2 dx$, est visiblement négatif avec l'hyp. $q \leq 0$.

D'autre part d'après l'E.D. $\int_a^b q(x)y(x)^2 dx = -\int_a^b y''(x)y(x) dx = -[y'(x)y(x)]_a^b + \int_a^b y'(x)^2 dx$ par I.P.P.

Le terme de bord est nul donc $\int_a^b q(x)y(x)^2 dx = \int_a^b y'(x)^2 dx \geq 0$.

Ainsi cette intégrale est à la fois positive et négative donc elle est nulle. On en déduit aussi que y est la fonction nulle car $\int_a^b y'(x)^2 dx = 0$ et $y^2 \geq 0$ entraîne bien que y^2 est la fonction nulle.

(M2), plus simple, avec la convexité comme à la question précédente : on a vu à la question précédente que y^2 est convexe. Si $y(a) = y(b) = 0$ alors $y^2(a) = y^2(b) = 0$ et pour tout $x \in [a, b]$, $x = (1-t)a + tb$ avec $t \in [0, 1]$, donc par convexité, $y^2(x) \leq (1-t)y^2(a) + ty^2(b) = 0$. Or $y^2 \geq 0$ trivialement, donc y^2 est nulle sur $[a, b]$ et y aussi.

II.2.) Un cas où $q > 0$ sur $\mathbb{R}$: le cas « elliptique »

Soit (E) : $x''(t) + q(t)x(t) = 0$ où $q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est croissante et positive sur un voisinage $[A, +\infty[$ de $+\infty$.

Soit x une solution de (E) et soit donc la fonction V définie par $V(t) = x(t)^2 + \frac{x'(t)^2}{q(t)}$.

On calcule $V'(t) = 2x'(t)x(t) + \frac{2x'(t)x''(t)}{q(t)} - \frac{x'(t)^2 q'(t)}{q(t)^2}$.

Comme x est solution de l'E.D., on sait que $x'(t)x(t) + \frac{x'(t)x''(t)}{q(t)} = 0$, et donc que $V'(t) = -\frac{x'(t)^2 q'(t)}{q(t)^2} \geq 0$ puisque q est croissante.

Donc V est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme q est positive sur un voisinage $[A, +\infty[$, alors V est positive sur $[A, +\infty[$, et on a donc $\forall t \in [A, +\infty[$, $0 \leq V(t) \leq V(A)$. Et comme $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq x(t)^2 \leq V(t) \leq V(0)$, la fonction x est aussi bornée sur $[A, +\infty[$. Par continuité, elle est aussi bornée sur $[A, +\infty[$. $\square$

Remarque : Ce "potentiel" V est très efficace, mais on ne comprend pas *a priori* d'où vient l'idée de considérer plutôt le q au dénominateur... pour que cela marche ! Il existe des façons plus naturelles de prouver ce résultat mais avec des outils plus sophistiqués.

1. par analogie avec ce qui se passe si q est une constante négative, où les solutions s'écrivent $A \operatorname{ch}(\sqrt{|q|}x) + B \operatorname{sh}(\sqrt{|q|}x)$.

2. qui nous suffit ici car y^2 est dérivable, mais le résultat est vrai aussi dans le cas non dérivable