

Rédaction ex. pl. 10 faits en classes

Exercice 4. Factoriser $2x^3 - 24x^2 + 78x - 56$ sachant qu'il admet un zéro « facile »

Solution 4 Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 78x - 56$.

On remarque que $f(1) = 2 - 24 + 78 - 56 = 0$ donc par lemme de factorisation, il existe un polynôme du second degré g tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)g(x)$.

En notant $g(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient immédiatement le coefficient dominant et le coeff. constant de g car dans le produit $(x-1)g(x)$ le coeff. dominant est produit des coefficients dominants et de même pour le coefficient constant. Ce qui précède, en italique, n'aurait pas à figurer sur une copie.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(2x^2 + bx + 56)$. En identifiant les termes en x^2 , on a $-24 = b - 2$ donc $b = -22$.

Donc $f(x) = (x-1)(2x^2 - 22x + 56)$.

A l'aide du discriminant, on trouve que le polynôme du second degré g admet 7 et 4 comme racines.

Ainsi, on conclut que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2(x-1)(x-7)(x-4)$.

Exercice 5. a) Résoudre : $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(2x+1)$.

b) Résoudre : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2). \end{cases}$

Solution 5 Politesse indispensable : commencer par l'ensemble de définition de l'équation

a) On note $(E) : \ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(2x+1)$.

L'équation (E) est bien définie ssi $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$ et $2x+1 > 0$. La conjonction de ces trois conditions équivaut simplement à $x > 1$.

Donc si on note D l'ensemble de définition de l'équation, on a $D =]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in D$, $(E) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln(2x+1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x+1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \quad (E')$.

Or $(E') \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 - \sqrt{3}$.

Avec la contrainte $x \in D$, on obtient que $(E) \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + 1$.

b) Notons (S) le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 & (1) \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) & (2) \end{cases}$ défini pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.

Or $(2) \Leftrightarrow \ln(x/y) = \ln(2) \Leftrightarrow x/y = 2 \Leftrightarrow x = 2y$.

Donc $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (2y)^2 - y^2 = 12, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4, \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 4. \end{cases}$ puisque x et y sont positifs.

Conclusion : l'unique solution au système est $(x, y) = (4, 2)$.

Exercice 6. Résoudre a) l'équation : $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. b) l'inéquation : $e^{2x}e^2 - 3ee^x + 2 \leq 0$.

Solution 6 Ici il n'y a pas de problème d'ensemble de définition de l'équation ou de l'inéquation.

a) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x, \\ X^2 - 3X + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x, \\ X = 1 \text{ ou } X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \text{ ou} \\ e^x = 2 \end{cases}$

Donc $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln(2)$.

b) $e^{2x}e^2 - 3ee^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow e^{2(x+1)} - 3e^{x+1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{x+1}, \\ X^2 - 3X + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{x+1}, \\ 1 \leq X \leq 2 \end{cases}$

Donc $e^{2x}e^2 - 3ee^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq e^{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x+1 \leq \ln(2) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \ln(2) - 1$.

Exercice 15.

Soit la fonction f définie par $f(x) = (\tan x)^{\sin x}$.

a) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f , et justifier qu'on peut réduire l'ensemble d'étude à la réunion de deux intervalles $I \cup J$.

b) Donner une relation simple entre $f(x+\pi)$ et $f(x)$.

On note $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et on va étudier f sur I

- c) Donner les limites de f aux bornes de I .
d) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$, qu'on ne cherchera pas à calculer, tel que f' s'annule en α et dresser le tableau de variation de f sur I .
Indication – Ecrire $f'(x)$ sous la forme $\cos(x)u(x)f(x)$
e) En déduire le tableau de variation de f sur le second intervalle d'étude J .
f) Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.
g) On note encore f la fonction f prolongée par continuité en 0.
Démontrer que la propriété du f) entraîne que f n'est pas dérivable en 0 et donner une propriété géométrique de Γ_f au point d'abscisse 0.
h) *Démontrer* l'encadrement : $\frac{2}{3} \leq \ln(3) \leq 2$.
i) En déduire que le α du d) vérifie $\alpha < \frac{\pi}{6}$.
j) Tracez Γ_f .

Solution 15 Consigne absolue :

On a $f(x) = e^{\sin(x) \ln(\tan(x))}$. TOUT FAIRE AVEC CETTE ÉCRITURE-LÀ !

a) (i) On a $x \in \mathcal{D}_f$ si, et seulement si, $\tan(x)$ est définie et positive si, et seulement si, $x \in]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Attention : l'écriture $\mathcal{D}_f =]k\pi, k\pi + \pi/2[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ n'est PAS correcte (on doit écrire une égalité d'ensembles!).

La bonne écriture est $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, k\pi + \pi/2[$.

Une écriture plus condensée est $\mathcal{D}_f =]0, \frac{\pi}{2}[+ \pi\mathbb{Z}$ où d'une manière plus générale, si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, on note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

(ii) Comme $\sin$ et $\tan$ sont 2π -périodiques, f est 2π -périodique.

Donc on peut restreindre l'étude à $D_f \cap [0, 2\pi[= I \cup J$ où $I = [0, \pi/2[$ et $J = [\pi, 3\pi/2[$.

b) On a $f(x + \pi) = e^{\sin(x+\pi) \ln(\tan(x+\pi))} = e^{-\sin(x) \ln(\tan(x))}$ donc

$$\forall x \in D_f, f(x + \pi) = \frac{1}{f(x)}.$$

L'idée : On fait l'étude sur I et sur $J =]\pi, 3\pi/2[$ on déduira l'allure de la courbe de cette relation $f(x + \pi) = \frac{1}{f(x)}$.

c) Pour $x \rightarrow \pi/2$ dans I , on a $\tan(x) \rightarrow +\infty$ et $\sin(x) \rightarrow 1$ donc $\sin(x) \ln(\tan(x)) \rightarrow +\infty$ donc

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} +\infty.$$

Pour $x \rightarrow 0$, on a une forme indéterminée :

Attention : ceux qui écrivent $0^0 = 1$ n'ont pas encore compris que les "puissances réelles" fabriquent des F.I. et que le *réflexe* est de passer à l'écriture exp.

Ici $f(x) = \exp(g(x))$ avec :

$$g(x) = \sin(x) \ln(\tan(x)) = \sin(x) \ln(\sin(x)) - \sin(x) \ln(\cos(x)),$$

le premier terme est de la forme $u \ln(u)$ avec $u \rightarrow 0$ donc tend vers 0 et le second terme n'est pas indéterminé, tend vers 0.

Ainsi $g(x) \rightarrow 0$ et donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Rédaction avec les équivalents : $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Comme $\tan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \neq 1$, on peut prendre le logarithme de l'équivalent : $\ln(\tan(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

Donc $\sin(x) \ln(\tan(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$ et comme $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a $\sin(x) \ln(\tan(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp(0) = 1$.

d) On a $f'(x) = \left(\cos(x) \ln(\tan(x)) + \frac{1}{\cos(x)} \right) f(x) = \cos(x) u(x) f(x)$, en posant :

$$u(x) = \ln(\tan(x)) + \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

L'énoncé nous invite à utiliser la méthode : **isoler le ln pour le tuer en un coup**

La fonction u est strictement croissante, comme somme de deux fonctions strictement croissantes ($\ln \circ \tan$ comme composée et $1/\cos^2$ comme composée de deux strictement décroissantes). (Bien sûr, on peut aussi dériver u).

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} u(x) = +\infty$. Donc par théorème de la bijection (u est continue, stricte monotonie et limites ci-dessus) u est bijective de $]0, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$, en part. il existe un unique $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que $u(\alpha) = 0$ et on a le tableau suivant :

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$1 \searrow$	β	$\nearrow +\infty$

e) Compte tenu de $1/\square$ décroissante, on obtient avec la relation du b), par composition :

x	π	$\alpha + \pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	1	$\nearrow 1/\beta$	$\searrow 0$

f) On a vu que $f'(x) = \cos(x) u(x) f(x)$. Quand $x \rightarrow 0$, on a $f(x) \rightarrow 1$, $\cos(x) \rightarrow 1$ et $u(x) \rightarrow -\infty$ donc $\boxed{f'(x) \rightarrow -\infty}$.

g) Par T.A.F., $\forall x \in I, \exists c_x \in]0, x[$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c_x)$ (1).

Quand $x \rightarrow 0$, on a $c_x \rightarrow 0$ par théorème des gendarmes, donc le membre de droite de (1) tend vers $-\infty$ par f).

Donc le taux d'accroissement de f (membre de gauche de (1)) tend vers $-\infty$ et donc : f n'est pas dérivable en 0 et Γ_f présente une tangente verticale (vers le bas).

Remarque L'objectif de cette question était de faire redémontrer le théorème de la limite de la dérivée dans le cas d'une limite infinie.

h) **M1** Par déf., $\ln(3) = \int_1^3 \frac{dt}{t}$.

Or $1 \leq t \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{t} \leq 1$, donc en intégrant pour $t \in [1, 3]$:

$$\int_1^3 \frac{1}{3} dt \leq \int_1^3 \frac{dt}{t} \leq \int_1^3 dt = 2,$$

ce qui démontre l'inégalité cherchée : $\boxed{2/3 \leq \ln(3) \leq 2}$.

M2 Par concavité du $\ln$, $\Gamma_{\ln}$ est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1, donc $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

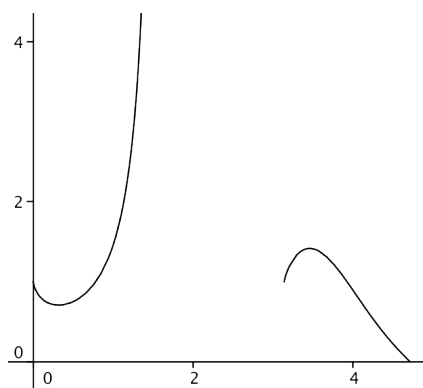
En appliquant cette inégalité à $1/x$, on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$, donc :

$$-\ln(x) \leq \frac{1-x}{x}, \text{ ou encore } \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}.$$

Au total $\forall x > 0$, $\frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$, et en appliquant ce résultat général à $x = 3$, on a la conclusion cherchée.

i) On a $u(\pi/6) = -\frac{1}{2} \ln(3) + \frac{4}{3}$. Par le h) on en déduit que $u(\pi/6) > 0$ et donc aussi $f'(\pi/6) > 0$. Comme f' est strictement croissante et que $f'(\alpha) = 0$, on conclut que $\alpha < \pi/6$.

j) Voici un graphe pas très beau, il y manque les tangentes : verticales en 0, horizontale en α .



Complément bonus à faire :

Pour vraiment tracer rigoureusement le graphe, on peut se demander quelles sont les tangentes éventuelles en π et $3\pi/2$, car en ces deux points, la fonction se prolonge par continuité.