

Exercice 1 (Colles semaine 8 : parce qu'il faut parfois habiller les fonctions, l'hiver arrive (équivalent d'une réciproque, suite)).

- Trouver un équivalent de Arccos en 1, en considérant $x \mapsto \sin(\text{Arccos}(x))$.
- On sait que $\text{ch}_{[1, +\infty[} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est bijective. On note argch sa réciproque. Donner une formule explicite pour Argch à l'aide de la fonction logarithme.
- Inspiré par le a) et par le b) donner deux façons différentes d'obtenir un équivalent de Argch au point 1.

Exercice 2. Résoudre sur \mathbb{R} les E.D. suivantes :

- $y' - 2y = x^2$.
- $y' = 2y + e^x(1 + x^2)$.
- $y' = y + e^x(1 + x^2)$.
Qu'y a-t-il de particulier à cet exemple, par rapport au b) ?
- $y' - y = x \cos(x)$.
- $y' = y + \sqrt{1+x}$ sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 3. Résoudre l'E.D. suivante $y' - \frac{1}{1-x+x^2}y = 0$.

Exercice 4. Résoudre $y' - \tan(x)y = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice 5. a) Résoudre sur chaque intervalle de définition l' E.D. $y' + \frac{1}{x \ln(x)}y(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

b) Etudier alors les solutions éventuelles sur $]0, +\infty[$ de $x \ln(x)y' + y = x$. (l'étude de la dérivabilité du recollement demande de connaître le D.L. $\ln(1+u) = u - u^2/2 + o(u^2)$ en 0)

Exercice 6. a) Résoudre l'E.D. $2x(1-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 1$ sur chacun des trois intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$.

b) Etudier les éventuelles solutions de l'E.D. sur l'intervalle $] -\infty; 1[$: l'étude de la dérivabilité demande les D.L.

c) Existe-t-il une solution de l'E.D. sur \mathbb{R} entier ?

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Soit $(E) : \forall x \in \mathbb{R}^+, y'(x) + y(x) = f(x)$.

Montrer que toutes les solutions y de (E) sont bornées sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 8. Montrer que toutes les solutions y de l'E.D. $y' + \exp(x^2)y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9 (inéquations diff. lin. d'ordre un). Soient a une application continue de $I = [t_0, \beta]$ dans \mathbb{R}^+ . Soient x, y deux fonctions vérifiant :

$$x(t_0) \leq y(t_0), \quad (1)$$

$$\forall t \in I, x'(t) \leq a(t)x(t), \quad (2)$$

$$\forall t \in I, y'(t) = a(t)y(t) \quad (3)$$

Montrer qu'alors pour tout $t \in [t_0, \beta]$, on a $x(t) \leq y(t)$.

Exercice 10. Soit $(E) : y'(x).y(x) + y(x)^2 = 0$. Résoudre (E) en posant $z(x) = y(x)^2$.

Exercice 11. a) Soit $(E_0) : y' + a(t)y = 0$ où a est une fonction continue T -périodique.

Déterminer à quelle CNS sur a , l'équation (E_0) admet une solution T -périodique autre que la fonction nulle.