

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 4, \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 1 \end{cases}.$$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante : $\operatorname{sh}(a) + \operatorname{sh}(a+x) + \operatorname{sh}(a+2x) + \operatorname{sh}(a+3x) = 0$.

Exercice 3. Donner une expression factorisée de la somme $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$ analogue à celle obtenue en exercice pour $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Exercice 4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n 3^k \operatorname{sh}^3\left(\frac{x}{3^k}\right)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$?

Exercice 5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a \operatorname{ch}(x) + b \operatorname{sh}(x)$.

A quelle CNS sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existe-t-il un couple $(A, \phi) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A \operatorname{ch}(x+\phi)$?

Exercice 6. Calculer des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$a(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad b(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}, c(x) = \sqrt{x+1}, d(x) = \ln(2+3x)$$

Exercice 7. Calculer une primitive pour chaque expression suivante :

$$\text{a) } f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{Arctan}(x)}}{1+x^2}, \text{ b) } g(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, \text{ c) } h(x) = \frac{\ln(2 + \arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 8. Calculer $\int_0^\pi \sin(u) e^u du$ si possible de deux manières différentes.

Exercice 9. Calculer $\int_{-1}^1 \arcsin^2(t) dt$.

Exercice 10. Calculer $I_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.

Exercice 11 (Intégrale sur une période). Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, périodique de période T . Soit $a \in \mathbb{R}$, quelconque. Montrer que : $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$. Ce nombre, indépendant de a , est appelé intégrale de f sur une période.

Exercice 12 (Calcul d'une intégrale « non élémentaire »). Montrer que $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t)) dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t)) dt$.

En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(t)) dt$.

Exercice 13 (Cas où f est symétrique par rapport à un axe $x = (a+b)/2$). a) Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x),$$

Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

b) Calculer $J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

c) Calculer $K = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{ix}}{1 + \cos^2(x)} dx$.