

Equivalents encore :

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto xe^x$.

- a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que $f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.
- c) Démontrer que $f^{-1}(x) - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(\ln(x))$.

Exercice 2. Soit f continue sur $] -1, 1[$ telle que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. Montrer que f n'est pas injective.

Fonctions trigonométriques :

Exercice 3. Démontrer, en interprétant graphiquement les deux inégalités proposées, que :

$$\forall x \in [0, \pi/4], x \leq \tan(x) \leq \frac{4x}{\pi}.$$

Exercice 4. Soit $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n(n+1)})}{\cos(\frac{1}{n}) \cdot \cos(\frac{1}{n+1})}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 5. Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque. Linéariser $x \mapsto \cos^{2p}(x)$.

Exercice 6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k\theta)}{3^k}$. Calculer la limite de (S_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7 (Indispensable). Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} e^{in\frac{\theta}{2}}$.
- b) En déduire une forme factorisée de $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
- c) Inspiré par ce qui précède, donner une formule pour $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Fonctions trigonométriques réciproques :

Exercice 8. Résoudre l'équation (dont on précisera l'ensemble de définition) : $\arcsin(\tan(x)) = x$.

Exercice 9. a) Résoudre l'équation $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

b) Comment pouvait-on voir presque sans calcul que cette équation admet une unique solution (sans la calculer) ?

Exercice 10. Calculer $\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/5) + \text{Arctan}(1/8)$

Exercice 11. 1) Si a, b sont des réels tels que $a.b \neq 1$, montrer que

$$\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k$$

en précisant ce que vaut la constante k suivant la position du point $M(a, b)$ dans le plan par rapport à l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ (par hyp. M n'est pas sur cet hyperbole, il y a trois cas).

2) Etudier la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{3x+7}{1-x}\right) - \text{Arctan}(x)$: ensemble de définition, tableau de variation avec limites, allure grossière du tracé.

3) Résoudre l'équation suivante : $\text{Arctan}\left(\frac{3x+7}{1-x}\right) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/2)$.