

**Fonctions polynomiales et rationnelles**

**Exercice 1.** Division euclidienne de  $f(x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2$  par  $g(x) = 2x^2 + 4x + 3$ .

**Exercice 2.** Primitives de  $f : x \mapsto \frac{-x+3}{2x+5}$ .

**Exercice 3.** a) Faire une étude complète, avec tracé de l'allure, de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+3x+3}$ .

On ne demande pas l'étude de la concavité/convexité, mais on pourra expliciter, sans calculs supplémentaires, deux ou trois points d'inflexions.

b) Après cette étude, montrer qu'il existe un point  $\Omega$  du plan qui est un centre de symétrie pour  $\Gamma_f$ . (Trouver explicitement ce point).

**Exercice 4.** Factoriser  $2x^3 - 24x^2 + 78x - 56$  sachant qu'il admet un zéro « facile »

**Fonctions logarithme et exp**

**Exercice 5.** a) Résoudre :  $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(2x+1)$ .

b) Résoudre :  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2). \end{cases}$

**Exercice 6.** Résoudre a) l'équation :  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ . b) l'inéquation :  $e^{2x}e^2 - 3e^x + 2 \leq 0$ .

**Deux autres exemples d'équations fonctionnelles**

**Exercice 7** (L'équation fonctionnelle du logarithme, étendue à  $\mathbb{R}^*$ ). Déterminer toutes les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}^*$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y).$$

**N.B.** – On pourra utiliser sans dém. le résultat du cours connu pour  $\mathbb{R}^{++}$ .

**Exercice 8** (Une équation sans hypothèse de continuité ou de dérivabilité). Déterminer toutes les fonctions  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos(y).$$

**Exercice 9** (Les fonctions additives dérivables). Déterminer toutes les fonctions  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

**Fonctions puissances réelles**

**Exercice 10.** Résoudre pour  $x > 0$  l'équation  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ .

**Exercice 11.** Soit  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que pour tout  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,  $\cos^p(\theta) \leq \cos(p\theta)$ .

**Exercice 12.** Quel est le nombre le plus grand :  $3^\pi$  ou  $\pi^3$ .

(On suppose connu que  $e < 3 < \pi$ ).

**Exercice 13.** Calculer  $f'(x)$  pour a)  $f(x) = x \cdot 3^{x^2+1}$ , b)  $f(x) = (2x)^{x+5}$ .

**Exercice 14.** a) Résoudre  $10^{x^2+2x} = \frac{1}{10}$ . b) Résoudre  $x^{2\sqrt{2}} - 3x^{\sqrt{2}} + 2 = 0$ .

**Etude de fonctions de type  $x \mapsto a(x)^{b(x)}$**

**Exercice 15.**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (\tan x)^{\sin x}$ .

a) Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de  $f$ , et justifier qu'on peut réduire l'ensemble d'étude à la réunion de deux intervalles  $I \cup J$ .

b) Donner une relation simple entre  $f(x+\pi)$  et  $f(x)$ .

On note  $I = ]0, \frac{\pi}{2}[$  et on va étudier  $f$  sur  $I$

c) Donner les limites de  $f$  aux bornes de  $I$ .

d) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in I$ , qu'on ne cherchera pas à calculer, tel que  $f'$  s'annule en  $\alpha$  et dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $I$ .

*Indication – Ecrire  $f'(x)$  sous la forme  $\cos(x)u(x)f(x)$*

e) En déduire le tableau de variation de  $f$  sur le second intervalle d'étude  $J$ .

f) Etudier  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ .

g) On note encore  $f$  la fonction  $f$  prolongée par continuité en 0.

Démontrer que la propriété du f) entraîne que  $f$  n'est pas dérivable en 0 et donner une propriété géométrique de  $\Gamma_f$  au point d'abscisse 0.

h) *Démontrer* l'encadrement :  $\frac{2}{3} \leq \ln(3) \leq 2$ .

i) En déduire que le  $\alpha$  du d) vérifie  $\alpha < \frac{\pi}{6}$ .

j) Tracez  $\Gamma_f$ .