Chap. B3 : Calcul de primitives et équations différentielles linéaires

Les équations différentielles sont le pivot de la conception scientifique du monde.

V.Arnold, mathématicien et physicien russe (1937-2010).

I Compléments sur les intégrales et calculs de primitives

0) Revoir le paragraphe VIII du B1 sur les intégrales :

Le but de cette section est de présenter deux outils fondamentaux pour le calcul (et plus généralement pour l'étude) d'intégrales : l'intégration par partie et le changement de variables

1) La méthode d'intégration par partie (I.P.P)

a) La formule :

(i) L'idée de la formule :

$\boxed{\text{une version intégrale de la formule sur la dérivée d'un produit}}$.

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv' \quad \text{ou encore} \quad [uv]_a^b = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$$

(ii) La formule d'I.P.P : En faisant passer un terme de l'autre côté :

Formule d'I.P.P $\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'}$

b) A quoi sert l'I.P.P ? Première réponse :

A éliminer des fonctions polynomiales en facteur d'une autre fct (qu'on sait primitiver)

(i) Cas simple avec un polynôme du premier degré. primitive de $x \mapsto x\sin(x)$, $x \mapsto xe^x$.
(ii) Cas où le polynôme est de degré plus grand : primitive de $x \mapsto x^2e^x$.
(iii) Pour des degrés plus grand, formule de récurrence. Exemple : calcul de $I_n = \int_{-1/2}^0 t^n\sqrt{2t+1}dt$ en considérant plus généralement les $I_{n,\alpha} = \int_{-1/2}^0 t^n(2t+1)^\alpha dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Exemple de la relation de réc. pour les intégrales de Wallis : $W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$

c) A quoi sert l'I.P.P ? Deuxième réponse :

A remplacer des fonctions par leurs dérivées plus gentilles :

Exemple primitiver $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$.

d) Retour sur certaines primitives vues au b) : une méthode plus efficace que l'I.P.P

Avec la méthode du b), pour primitiver $x \mapsto x^{17}e^{3x}$ on aurait besoin de 17 I.P.P...
Cependant, il y a une alternative aux I.P.P à répétition dans les cas suivants :
(i) Pour les $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$: méthode générale $F(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ avec $\deg(P) = \deg(Q)$.
(ii) Adaptation du (i) au cas des $f(x) = P(x)\sin(\omega x)$ via $f_{\mathbb{C}}(x) = P(x)e^{i\omega x}$.
(iii) Cas le plus général $x \mapsto f(x) = P(x)e^{\alpha x}\sin(\omega x)$ ou $\cos(\omega x)$.
Exemple important pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\omega x)$.

2) La méthode du changement de variable

a) La première formule et sa mise en oeuvre pratique

(i) L'idée de la formule

$\boxed{\text{Une écriture intégrale de la formule sur la dérivée d'une fonction composée}}$

Formule : $\boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.}$

Cette formule n'est rien d'autre que le fait de reconnaître la dérivée de $F(\varphi(t))$.

(ii) Savoir faire pratique essentiel : $\boxed{\text{3 choses à penser : } u = \varphi(t),\ du = \varphi'(t)dt \text{ et les bornes.}}$

Exemple : $\int_2^3 x\exp(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_4^9 e^u du.$

Sous cette forme, pratiquer le changement de variable n'est guère plus qu'"éviter" de reconnaître une dérivée de fonction composée... cependant :

b) Exemple des changement de variable affine :

(i) Calcul de $\int_0^1 t\sqrt{2t+1}dt$ par changement de var.

Dans ce cas, on a utilisé la bijectivité $u = 2t+1 \Leftrightarrow t = \frac{u-1}{2}$.

(ii) Cas plus général de $\int_0^1 t^n\sqrt{2t+1}dt$: comparaison I.P.P/changt de var.

c) Une nouvelle forme du changement de variable dans le cas φ bijective.

Dans $\int_a^b f(t)dt$ on pose $t = \varphi(u) \Leftrightarrow u = \varphi^{-1}(t)$ et $dt = (\varphi)'(u)du$ et les bornes. La mise en oeuvre pratique est donc la même.

Exemple 1 : $\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$ avec $u = e^t$. On se ramène à une fonction rationnelle, cf. 3).

Exemple 2 : $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$, en posant $u = \arcsin(t) \Rightarrow t = \sin(u)$.

Remarque double : *Le résultat de l'ex. 2 est évident si on pense à l'aire du quart de disque. Mais d'un point de vue plus théorique,pour nous, il démontre que l'aire du disque unité est π, alors que nous avions défini π à partir d'une intégrale de longueur d'arc, cf. B1 Appendice.*

d) Intérêt de la formule de changement de variables pour des questions plus théoriques :

(i) Preuves nécessaires d'"évidences géométriques" :

si f est continue et paire sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f = \int_{-x}^0 f$.

si f est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f = -\int_{-x}^0 f$.

(ii) Preuve de la prop. fondamentale du logarithme : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

3) Calculs de primitives des fonctions rationnelles

a) Rappel : la division euclidienne ramène $f(x)$ à $p(x) + f_1(x)$ avec $\deg(f_1) < 0$.

b) Si $deg(f) < 0$: un premier cas de *décomposition en éléments simples* (D.E.S.) : le cas où le dénominateur, de degré n, admet n racines distinctes dans $\mathbb{R}$. Pour le degré $n = 2$ cela correspond au cas $\Delta > 0$.

(i) Thm. (admis) Si $f(x) = \frac{p(x)}{\lambda(x-x_1)\dots(x-x_n)}$ avec les x_i deux à deux distincts, et degré de p strictement inférieur à n, alors il existe des coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ uniques tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1,\dots,x_n\}$, $f(x) = \frac{\lambda_1}{x-x_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{x-x_n}$.
Méthode pour obtenir les λ_i : $\lambda_i = \lim_{x\to x_i}(x-x_i)f(x)$.

(ii) Application au calcul de primitive. Exemple $f(x) = \frac{2x+7}{x^2-5x+6}$ (cas de tous les dénominateurs de degré 2 à $\Delta > 0$).

Un autre exemple avec $f(x) = \frac{x^3+2x^2+x+5}{x^2-5x+6}$.

La D.E.S s'écrit $f(x) = e(x) + \frac{\lambda_1}{x-2} + \frac{\lambda_2}{x-3}$ où $e \in \mathbb{R}[x]$ est *la partie entière* de f (quotient de la division euclidienne).

Les λ_i se calculent encore avec $\lim_{x\to x_i}(x-x_i)f(x)$

c) L'autre cas extreme de *décomposition en éléments simples* : le cas où le dénominateur s'écrit $(x-x_0)^n$. C'est le cas des dénom. de degré deux à $\Delta = 0$.

(i) Thm. (admis) Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{(x-x_0)^n}$ avec $p \in \mathbb{R}[x]$ quelconque alors il existe des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ uniques tels que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = e(x) + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{(x-x_0)^i}$.

(ii) Exemple $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{(x-2)^2} = 1 + \dfrac{\lambda_2}{(x-2)^2} + \dfrac{\lambda_1}{x-2}$ où $e(x) = 1$ est la partie entière.

On trouve λ_2 comme $\lim_{x\to 2}(x-2)^2 f(x)$ et on se débrouille pour λ_1 par exemple en calculant pour $x = 3$ ici.

d) Le cas général de la D.E.S. s'obtient en combinant b) et c) : à condition que le dénominateur n'ait pas de racines complexes non réelles ! Un exemple $f(x) = \dfrac{2x^3+x+1}{(x+1)(x-2)^2}$.

e) Cas où le dénominateur a des racines complexes non réelles ? Sur l'exemple où le dénominateur est de degré deux à $\Delta < 0$: pas de D.E.S mais ...

(i) Un exemple fondamental : savoir par coeur qu'une primitive de $(x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2})$ est $(x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan(\dfrac{x}{a}))$.

(ii) Cas d'une fraction de la forme $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $\Delta < 0$. Comment on se ramène au (i) par *forme canonique* et *changement de variable.*

(iii) Cas général : $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c}$.

On écrit $f = \lambda \dfrac{u'}{u} + \dfrac{\mu}{u}$, où $u(x) = ax^2+bx+c$ et λ et μ sont constantes.

Avec ces outils, on saura primitiver toutes les fonctions rationnelles.... dont on sait trouver les racines du dénom.
Pour l'instant en tous cas savoir bien primitiver toutes les $f(x) = \dfrac{p(x)}{ax^2+bx+c}$ avec les trois cas sur Δ.

4) Primitives de fonctions composées à partir de cos et sin

a) Primitive de tan : $-\ln|\cos(x)|$ (reconnaître $-u'/u$).

b) Cas des puissances :

- Méthode générale vue au B1 : linéarisation.
- Pour les degrés impairs sans linéariser : changement de variables !

N.B. Pour le degré 2, formules à savoir directement !

c) Cas des quotients : cas facile de $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{\cos^2(t)} = \tan(x)+k$ et donc $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{\sin^2(t)} = -\operatorname{cotan}(x)+k$.
Cas de $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{\sin(t)} = \ln|\tan(x/2)| + k$ (tgte arc moitiée) et $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{\cos(t)} = \ln|\tan(x/2+\pi/4)|+k$.

d) Etude de l'intégrale de Wallis : $W_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$. (*exercice planche).*

II Equations différentielles linéaires (E.D.L.) d'ordre 1

Une E.D. est une équation fonctionnelle : on cherche une *fonction inconnue*, notée ici, $x \mapsto y(x)$ qui vérifie une certaine équation où y apparaît ainsi que des dérivées de y.

0) Introduction à la forme des différentes E.D. :

a) Forme générale des E.D.L. d'ordre n :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un INTERVALLE et $a_n, \dots, a_0, b$ des *fonctions* de I dans $\mathbb{R}$.
On cherche les $y \in \mathcal{D}^{(n)}(I, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in I$:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

Souvent on trouve dans les énoncés :

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

N.B. Le y à la place du $y(x)$ est un abus de notation.

b) Les deux cas particuliers et les hyp. que nous étudierons dans ce chapitre :
(i) Le cas $n = 1$: E.D.L. du premier ordre :
On se donne trois fonctions a_1, a_0, b CONTINUES sur un INTERVALLE I et on cherche les fonctions $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in I$:

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \qquad (\mathcal{E}).$$

Exemple $\sin(x)y'(x) + \ln(x)y(x) = e^x$ définit une E.D.L. d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(ii) Le cas $n = 2$: E.D.L. du second ordre :
On se donne quatre fonctions a_2, a_1, a_0, b CONTINUES sur un INTERVALLE I et on cherche les fonctions $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in I$:

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

(iii) N.B. Les hyp. de continuités sur les fonctions coefficients de y, y', y'' et pour la fonction dans le *second membre* b sont importantes pour les théorèmes d'existence de solution que nous donnerons.

Par exemple, les plus simples des E.D. d'ordre 1 :

$$y'(x) = b(x)$$

ont des solutions pour b continue par le théorème fondamental de l'analyse qui donne l'existence de primitives pour les fonctions continues.

c) Exemples d'E.D. non linéaires :
(i) Définition la plus générale d'une E.D. d'ordre 1 : une équation de forme quelconque d'inconnue $x \mapsto y(x)$ et où apparaît sa dérivée $x \mapsto y'(x)$, mais pas de dérivée d'ordre supérieur.
Par exemple $\ln(y(x)) + e^x.\cos(y'(x)) = 16$.
(ii) De même pour une E.D. d'ordre 2 : une équation de forme quelconque d'inconnue $x \mapsto y(x)$ et où apparaît sa dérivée seconde $x \mapsto y''(x)$ et éventuellement sa dérivée première.
Exemple $y''(x) + 2e^{-y'(x)} + \sin(y(x)) = 0$.
(iii) Les deux exemples donnés aux (i) et (ii) sont des exemples d'E.D. non linéaires : au moins l'une des fonctions y, y', ou y'' est « à l'intérieur d'une fonction ». A l'inverse dans les E.D. linéaires, on a seulement le droit de *multiplier par une fonction*.
Ainsi $y'(x)+\sin(x)y(x) = 0$ est une E.D. linéaire alors que $y'(x)+\sin(y(x)) = 0$ est non linéaire.
(iv) Un exemple vu en chimie :
Les cinétiques dites « d'ordre deux » en chimie sont régies par des E.D. *d'ordre 1* (sic!) non linéaires, où la fonction inconnue $t \mapsto c(t)$ apparaît au carré :

$$c'(t) = kc(t)^2$$

1) Passage à la forme normalisée :
Pour $(\mathcal{E})$: $\alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \beta(x)$, on commence par étudier $(\mathcal{E})$ sur chaque *intervalle* où la fonction α_1 ne s'annule pas. Sur chacun de ces intervalles $(\mathcal{E})$ est équivalente à une équation sous forme *normalisée* i.e. où le coeff. de y' vaut 1 :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E).$$

Tous les paragraphes suivants, avant le 5), traitent des équations sous forme normalisée.

2) EDL Sans Second Membre : $y' + a(x)y = 0$ (E_{SSM}) étudiée sur un INTERVALLE I.
a) Echauffement : le cas particulier de $a(x) = a$ constante.

(i) $\boxed{\text{Thm. : soit } a \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}). \text{ Alors : } y' + ay = 0 \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ y = \lambda e^{-a\Box}.}$

(ii) Premier essai de preuve : la méthode intuitive utilisée en physique : pb. de savoir a priori que y ne s'annule pas. En deuxième année : elle sera justifiée par un théorème profond.

(iii) Dém. plus rigoureuse : Idée à retenir : multiplier par e^{ax} pour faire apparaître une dérivée !

b) Le thm. général :

(H) Soit (E_{SSM}) : $y'(x)+a(x)y(x)=0$ une E.D.L. du premier ordre S.S.M., où $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et I est un INTERVALLE. Soit S l'ensemble des solutions de (E_{SSM}).
(C) $y \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y(x) = \lambda \exp(-A(x))$, où A est une primitive de a.

c) Consignes pour la résol. en pratique, illustrées sur l'exple de $y' + \frac{1}{\sin(x)} y = 0$:

(i) Toujours commencer par l'ensemble d'étude.
(ii) Si c'est l'union de plusieurs intervalles, étude (si possible simultanée) sur chaque intervalle I_k, avec une constante multiplicative λ_k par intervalle I_k.
(iii) En cas de valeur abs. dans la primitive, si possible, les "faire rentrer" dans la constante.

d) Un autre intérêt de la méthode « multiplier par $\exp(A(x))$ pour faire apparaître une dérivée » :

cette méthode s'applique aussi , par exemple, aux *inéquations différentielles*

Exple : montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) - 2f(x) \geq 0$ et $f(0) = 0$ alors f croissante sur $\mathbb{R}^+$.

e) Terminologie : Les équations S.S.M. sont aussi appelées **équations *homogènes*** car si y est solution alors λy est aussi solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) EDL Avec Second Membre : $y' + a(x)y = b(x)$ (E)

a) Deux remarques préliminaires

(i) Remarque 1 : Pour les E.D.L.S.S.M. on a toujours une solution évidente : la fonction nulle. En revanche, si b n'est pas la fonction nulle, il n'y a pas forcément de solution évidente pour (E). Donc déjà se pose le problème de *l'existence* d'au moins une solution à une telle équation.

(ii) Remarque 2 : En revanche, on a la propriété positive suivante :

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors $y = y_1 - y_2$ est solution de (E_H) $y' + a(x)y = 0$ (E.D.S.S.M. associée ou encore Equation Homogène associée)

Cette remarque 2 donne facilement le (ii) du théorème suivant :

b) Thm. : *Soit I un* intervalle. *Soit $(a,b) \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})^2$. Soit (E) : $y' + a(x)y = b(x)$. Soit S_E l'ensemble des solutions de (E). Alors :*
(i) $S_E \neq \varnothing$.
(ii) *Si on fixe une solution $y_p \in S_E$ (qui existe par (i)), alors l'ensemble S_E est égal à $\{y_p + y_h,\ y_h \in S_{E_H}\}$, où (E_H) est l'E.D. homogène associée.*

Retenir : pour avoir toutes les solutions de (E) : on fixe une solution particulière y_p de (E) et on ajoute toutes les solutions y_h de l'E.D. homogène associée.

c) Illustration sur un exemple : (E) : $y' + y = 3$.

4) Méthode générale de résolution : Méthode de la Variation de la Constante

a) Méthode générale pour résoudre (E) : $y' + a(x)y = b(x)$:

Encore la méthode « multiplier par $\exp(A(x))$ pour faire apparaître une dérivée »

Conséquence : on a démontré le théorème du 3) b) avec la forme générale des solutions : $y_p + y_h$ où y_p sol. part. et y_h décrit l'ensemble des sol. de (E_H). En outre on a une écriture intégrale de y_p.

b) Réformulation : la M.V.C. un changement de fonction inconnue

• On connaît la forme des solutions $y_h(x) = \lambda \exp(-A(x))$ de l'E.D.H. associée avec λ constante réelle.
• On fait le *changement de fonction inconnue* : $y(x) = z(x)\exp(-A(x))$ (1), où $x \mapsto z(x)$ fonction dérivable puisque (1) $\Leftrightarrow z(x) = y(x)\exp(A(x))$.
• En remplaçant y par z dans l'équation : miracle ! On obtient une condition seulement sur $z'(x)$ et on obtient $z(x)$ comme une primitive.
Savoir écrire directement $z'(x)e^{-A(x)} = b(x)$.
• Si possible, on calcule $z(x)$ explicitement, à défaut on l'écrit comme une $\int_a^x$ plus une constante quelconque.

c) Illustration sur deux exemples :

(i) Exple à coeff. constant : $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

(ii) Exple à coeff. non constant : $y' - \text{cotan}(x)y = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

d) Remarque qui sera approfondie en exercice :

Pour les E.D. à coefficient $a(x) = a$ constant, pour certains S.M., il y a des alternatives plus simples à la M.V.C. pour trouver une sol. particulière y_p. Un cas déjà vu au 3) c).

5) Cas des équations non normalisées

a) Forme : $(\mathcal{E})\ : \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \beta(x)$,

Méthode : se placer sur chacun des intervalles où α_1 ne s'annule pas, puis étude du recollement éventuel : on veut une fonction dérivable.

b) Etude sur un exemple :

Exercice : *Résoudre sur* $]-\pi/2, \pi/2[$ *l'E.D.* $\tan(x)y' + 2y = \cos(2x)$ (E)

Remarque préliminaire : *Cette E.D. est bien définie pour tout* $x \in I =]-\pi/2, \pi/2[$, *mais pour l'étudier, on va d'abord la normaliser donc se placer sur* $I_1 =]0, \pi/2[$ *et* $I_2 =]-\pi/2, 0[$. *Ensuite on étudiera les solutions dérivables sur* I *entier.*

Plan de l'étude :
• Etudier sur l'intervalle $I_1 =]0, \pi/2[$
• Etudier sur l'intervalle $I_2 =]-\pi/2, 0[$.
• Considérer la valeur $y(0)$ prescrite par l'équation.
Alors : $y \in \mathcal{D}(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R})$ sera solution de (E) ssi y a les valeurs prescrites ci-dessus sur I_1, I_2 et en 0 **et** y est dérivable en 0. On est donc ramené à l'étude de la dérivabilité au point 0 : commencer déjà par la continuité !

c) Un autre exemple très différents

Trouver toutes les fonctions $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'E.D. $xy' - 4y = 0$.
Cette fois, on a une famille à deux paramètres de fonctions solutions, qui passent toutes par O.

6) Problème de Cauchy : E.D. avec condition initiale

a) Théorème pour les équations normalisées :

(i) **Terminologie :** On se donne une E.D. (E) du premier ordre dont on note y la fonction inconnue et définie sur un intervalle I, et un couple $(x_0, \eta_0) \in I \times \mathbb{R}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} (E) \\ y(x_0) = \eta_0 \end{cases}$ est la recherche des fonctions y vérifiant l'E.D. (E) avec la “condition initiale” (abrev. C.I.) $y(x_0) = \eta_0$.

(ii) **Théorème – Hyp.** Soit I un intervalle, et soit $(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ une E.D.L. du premier ordre *normalisée* où $(a, b) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})^2$. Soit $(x_0, \eta_0) \in I \times \mathbb{R}$.
Concl. Il existe une unique $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ solution du pb. de Cauchy $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \\ y(x_0) = \eta_0 \end{cases}$

(iii) *Preuve du théorème* – Soit A une primitive de a et y_p une solution particulière fixée de (E). On sait par le théorème du 3) que y_p existe toujours et que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions y s'écrivant :

$$\forall\, x \in I,\ y(x) = y_p(x) + \lambda \exp(-A(x))$$

pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une telle solution vérifie $y(x_0) = \eta_0$ si, et seulement si, $y_p(x_0) + \lambda \exp(-A(x_0)) = \eta_0$ ce qui équivaut à $\lambda = (\eta_0 - y_p(x_0)) \exp(A(x_0))$.

Cette unique valeur de λ détermine bien une et une seule solution au pb. de Cauchy. □

b) Attention au cas des E.D. non normalisées : *Le théorème ne s'applique pas aux équations* non normalisées $(\mathcal{E})$: $\alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \beta(x)$ *aux points* x_0 *où* α_1 *s'annule.*

Pour une C.I en un tel x_0, on peut ne pas avoir de solutions, ou plusieurs solutions.

Dans l'exemple du 5) b) pour $x_0 = 0$: si $\eta_0 \neq 1/2$, il n'y a pas de solution pour la C.I. $y(0) = \eta_0$. On verra sur la planche d'autres exemples où il peut y avoir plusieurs, voire une infinité de sol. pour une C.I.

7) Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

Via la propriété $\forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \dfrac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$, *toute la théorie précédente s'étend* verbatim *aux fonctions à valeurs complexes.*

En revanche, pour la pratique :

Pour primitiver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on l'écrit $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ avec f_1 et f_2 à valeur réelles et on primitive f_1 et f_2 en F_1 et F_2 et $F = F_1 + iF_2$.

Un exemple important :

si $f(x) = \dfrac{1}{x-i}$ ne surtout pas primitiver en $\ln|x-i|$ mais écrire $\dfrac{1}{x-i} = \dfrac{x+i}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2+1} + i\dfrac{1}{x^2+1}$

Application à l'équation différentielle où on cherche les $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ y'(x) + \frac{1}{x-i} y(x) = 0.$$