

Chap. B2 : fonctions usuelles (fin)

Tout le B0 sur les manip. pratiques de fonctions trigo. est à revoir, rajouter seulement le IV 4) et le 5) ci-dessous. Le 1), 2), 3) sont culturels. Tout le D.M. 5 sur les fonctions trigo. récip. est à maîtriser c'est le §V de ce cours. Le §VI porte sur les fonctions hyperboliques.

IV Fonctions trigonométriques :

Mode d'emploi de ce IV : Le 1), 2) et 3) visent à aller vers une définition rigoureuse des angles et des fonctions sin et cos. Tels quels, ils sont hors programme et non exigibles : c'est pourquoi aussi tous les détails ne sont pas donnés, mais seront facilement comblés par les plus motivé(e)s. Les paragraphes suivants 4) et 5) contiennent en revanche des compléments importants au B0.

1) La notion de longueur d'arc de cercle, et le nombre π :
a) Définition de la longueur d'un arc de cercle, dans le premier quadrant

Considérons dans le plan $\mathbb{R}^2$, le quart de cercle unité, graphe de $f : t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

Soit $x \in [0, 1]$, découpons en abscisse le segment $[0, x]$ comme suit : pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision régulière $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = x$ en n segments de longueur x/n de sorte que $t_i = ix/n$.

Notons $M_i = (t_i, f(t_i))$ comme indiqué sur la figure des notes : notons que les deux extrémités sont fixes $M_0 = (0, 1)$ et $M_n = (x, f(x))$ qu'on notera $M(x) = (x, f(x))$.

La ligne polygonale $M_0M_1, \dots, M_n$ a pour longueur :

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} ((t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2)^{1/2} \quad (0)$$

L'idée est de faire tendre n vers l'infini : la ligne polygonale va « tendre » vers l'arc de cercle : et la limite de L_n sera la longueur de l'arc de cercle entre M_0 et $M(x)$, notée $\widehat{M_0M(x)}$.

Pour calculer la limite de L_n , appliquons le T.A.F. à la fonction f (continue sur $[0, x]$ dérivable au moins sur $]0, x[$), pour chaque couple (t_i, t_{i+1}) (pour $i = 0, \dots, n-1$) : on sait qu'il existe un $c_i \in]t_i, t_{i+1}[$ tel que :

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = (t_{i+1} - t_i)f'(c_i) = \frac{x}{n} \frac{(-c_i)}{\sqrt{1-c_i^2}} \quad (1).$$

En mettant (1) dans (0), comme $1 + \frac{c_i^2}{1-c_i^2} = \frac{1}{1-c_i^2}$, on obtient :

$$L_n = \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-c_i^2}} \quad (2)$$

Idée – Il est naturel de définir la longueur d'arc de cercle de $M_0 = (0, 1)$ à $M = (x, f(x))$, comme la limite, si elle existe, des longueurs des lignes polygonales L_n quand n tend vers l'infini. Or :

Théorème (sur les sommes de Riemann) à comparer à la déf. de l'intégrale du B1. :

Les sommes $\frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-c_i^2}}$ convergent quand $n \rightarrow \infty$ vers : $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

D'où la *définition naturelle* :

Définition – Pour tout $x \in [0, 1[$, la longueur $\ell(x)$ d'arc de cercle de $M_0 = (0, 1)$ à $M = (x, f(x))$ est la limite de la suite (L_n) quand $n \rightarrow +\infty$, et elle vaut aussi : $\ell(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

N.B. – A ce stade, on ne connaît pas de “formule usuelle” pour une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

b) Propriétés de la fonction longueur d'arc : $x \mapsto \ell(x)$

(i) Par déf. $\forall x \in [0, 1[$, $\ell'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ donc ℓ est *strictement croissante* sur $[0, 1[$.

(ii) Par ailleurs, pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$ donc $1 - t^2 \geq 1 - t$, donc $\sqrt{1 - t^2} \geq \sqrt{1 - t}$, donc (nombres positifs strictement) : pour tout $t \in [0, 1[$: $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - t}}$.

Donc pour tout $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t}}$.

Mais on sait calculer $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t}} = 2 - 2\sqrt{1 - x}$. (C'est l'avantage par rapport à $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$).

Donc $\forall x \in [0, 1[$, $0 \leq \ell(x) \leq 2 - 2\sqrt{1 - x} \leq 2$.

Par (i) et ce qui précède, on peut appliquer le *théorème de la limite monotone* pour conclure que $\ell(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \rightarrow 1$.

Définition On appelle $\frac{\pi}{2} := \lim_{x \rightarrow 1} \ell(x)$. On notera encore $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.
Autrement dit, on définit $\pi/2$ comme la longueur d'arc du quart du cercle unité.

Rem. 1 Dans la déf. précédente, l'intégrale s'entend comme la limite des $\int_0^x$, quand $x \rightarrow 1$. En effet par rapport à la déf. de l'intégrale donnée au B1, comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ne se prolonge pas par continuité en 1, il s'agit d'une *intégrale généralisée*.

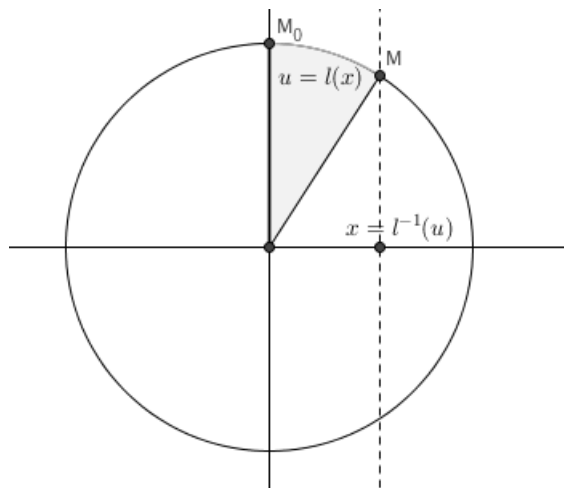
Rem. 2 La majoration précédente donne que $\pi/2 \leq 2$. On peut faire mieux... Archimède...

2) Définition des fonctions sin, cos “dans le premier quadrant” :

a) Par construction, la fonction $\ell : [0, 1] \rightarrow [0, \pi/2]$ est *continue, strictement croissante* et $\ell(0) = 0$, $\ell(1) = \pi/2$ donc par théorème de la bijection, ℓ est bijective de $[0, 1]$ donc $[0, \pi/2]$.

Donc ℓ est une bijection continue entre deux intervalles, on sait donc (thm sur la continuité d'une récip. B1) que $\ell^{-1} : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$ est aussi continue.

La fonction ℓ^{-1} associe donc à chaque longueur d'arc $u \in [0, \pi/2]$ l'abscisse $x \in [0, 1]$ de l'unique point M tel que l'arc $\widehat{M_0 M}$ soit de longueur u , comme indiqué sur le dessin ci-dessus.



b) Où l'on définit enfin le sinus :

Définition : $\forall u \in [0, \pi/2]$, $\sin(u) \stackrel{\text{def}}{=} \ell^{-1}(u)$.

Remarque 1 : Ainsi on définit le sinus comme la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$. En comparant au DM, cela signifie qu'on définit d'abord l'arcsin, puis le sinus !

Remarque 2 il ne faut pas oublier que nos arcs partent de $M_0 = (0, 1)$ et pas de $(1, 0)$ comme d'habitude. La raison de ce choix un peu déroutant était de ne pas commencer par introduire une fonction longueur d'arc qui aurait été $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ avec le pb. de l'intégrale en 1.

c) Et le cosinus ?

Idée : pour le point M tel que $\widehat{M_0M} = u$ on a posé que $\sin(u)$ était l'abscisse de M , on veut bien sûr que $\cos(u)$ soit l'ordonnée de M .

Par Pythagore, on obtient donc la définition suivante :

$$\boxed{\text{Déf. } \forall u \in [0, \pi/2], \cos(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - \ell^{-1}(u)^2} = \sqrt{1 - \sin^2(u)}.$$

3) Démonstrations des propriétés attendues de $\sin, \cos$

a) Prolongement : On prolonge la déf de $\sin$ et $\cos$ « par symétrie », sur $[-\pi, \pi]$.

(Autrement dit, pour $u \in [\pi/2, \pi]$, on pose que $\sin(u) = \sin(\pi - u)$ et $\cos(u) = -\cos(\pi - u)$, et pour $u \in [-\pi, 0]$ on définit $\cos(u) = \cos(-u)$ et $\sin(u) = -\sin(-u)$.)

Ensuite on prolonge ces fonctions en des fonctions 2π -périodiques.

b) Dérivabilité, dérivées :

(i) Par théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\ell : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est dérivable sur $[0, 1[$ de dérivée $\ell' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$.

Donc par théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque $\sin = \ell^{-1}$ est dérivable sur $[0, \pi/2[= \ell^{-1}([0, 1[)$ et $\forall u \in [0, \pi/2[, \sin'(u) = \frac{1}{\ell'(\sin(u))} = \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \cos(u)$.

Le théorème de la limite de la dérivée, qui s'applique car on sait que $\sin$ continue sur $[0, \pi/2]$, dérivable sur $[0, \pi/2[$ et $\sin'(u) = \cos(u) \xrightarrow[u \rightarrow \pi/2]{} \cos(\pi/2) = 0$ montre que $\sin$ est aussi dérivable en $\pi/2$ et que la formule $\sin' = \cos$ est donc valable sur $[0, \pi/2]$.

Avec les prolongements du a), on en déduit l'égalité $\boxed{\sin' = \cos}$ sur $\mathbb{R}$ (exercice).

(ii) Exercice : démontrer alors que $\cos' = -\sin$ sur $\mathbb{R}$.

c) Propriétés algébriques :

Comment montrer les formules d'additions comme : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et ses soeurs ?

Une solution vient des propriétés de dérivabilité qu'on vient de montrer.

En effet : $\cos$ et $\sin$ vérifient la même E.D. $y'' + y = 0$.

Mais alors pour b fixé, les fonctions $y_1 : a \mapsto \cos(a+b)$ et $y_2 : a \mapsto \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ vérifient la même E.D. $y'' + y = 0$ avec les mêmes conditions initiales $y_1(0) = y_2(0)$ et $y_1'(0) = y_2'(0)$ ce qui par théorème (cf. B3), donne l'égalité $y_1 = y_2$.

d) Propriété fondamentale de paramétrage du cercle :

Thme (fondamental) En notant $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{C}, \exists ! \theta \in [0, 2\pi[, \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ y = \sin(\theta). \end{cases}$$

4) Complément au B0 sur les prop. analytiques de $\sin, \tan$: des inégalités importantes

a) Inégalités utiles pour le sinus : (i) $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$

La concavité de $\sin$ sur $[0, \pi]$ donne cette inégalité sur $[0, \pi]$. Pourquoi cela suffit-il ?

(ii) Inégalité en sens inverse : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ également avec la concavité.

b) Cas de $\tan$: inégalité $\forall x \in [0, \pi/2[, x \leq \tan(x)$. Le graphe de $\tan$ doit être bien connu !

5) Complément au B0 sur la polynomialisation resp. la linéarisation :

a) Polynomialisation :

(i) expression générale des polynômes de Tchebychev T_n tels que $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$.

Abraham et Isaac donnent une écriture explicite de T_n comme une somme.

(ii) Que faire pour $\sin(nx)$? Simplement dériver ! $n \sin(nx) = \sin(x) T'_n(\cos(x))$.

(iii) Savoir calculer le coeff. dominant de T_n à partir de la formule explicite.

(iv) Savoir enfin trouver une relation de récurrence d'ordre 2 entre $T_{n+1}(x)$ et $T_n(x)$, $T_{n-1}(x)$.

b) Linéarisation : Léonard et Isaac pour linéarisation de $\sin^n(x)$ (resp. $\cos^n(x)$) cf. ex. pl. : attention à la parité de n .

V Fonctions trigonométriques réciproques : tout le D.M. 4(cahier de vacances)

Retenir surtout la dissymétrie de certaines opérations : prendre le sin fait oublier des choses, prendre l'arcsin non. Savoir bien pratiquer le raisonnement par analyse/synthèse.

VI Fonctions hyperboliques :

1) L'héroïne de ce VI :

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble :

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$$

a) **Tracé** : Tracé de $\mathcal{H}$ en voyant $\mathcal{H}$ comme réunion de deux graphes de fonctions. On trouvera aussi les droites asymptotes de ces graphes.

b) **Changement de repère ramenant $\mathcal{H}$ au graphe de $u \mapsto 1/u$** :

En remarquant que $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et en posant $u = x - y$ et $v = x + y$, on montre que pour un certain repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ à préciser, un point $M = (x, y)$ tel que $[M]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{H}$ si, et seulement si, $v = 1/u$.

Ceci montre que l'ensemble $\mathcal{H}$ est une hyperbole au sens vu au lycée.

c) **Ressemblance algébrique avec le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$** :

(i) Rappel : THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE (CF. V) (donné par la *construction* des fonctions sin et cos) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \exists ! \theta \in [0, 2\pi[, \begin{cases} x = \cos(\theta), \\ y = \sin(\theta). \end{cases}$$

(ii) *Reformulation* : $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ est une bijection de $[0, 2\pi[$ sur le cercle unité, on dit un *paramétrage bijectif* du cercle unité.

(iii) Motivation pour la suite : peut-on trouver un paramétrage analogue pour l'hyperbole $\mathcal{H}$?

2) Méthode à la Euler pour "trouver les fonctions hyperboliques" :

a) **Extension de cos et sin aux variables complexes**

i) On rappelle qu'on sait définir e^z pour tout $z \in \mathbb{C}$. Comment est-ce défini ?

ii) On pose alors, *par définition* :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Ce sont bien sûr alors des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: image de $\cos|_{\mathbb{R}}$, $\sin|_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{C}$.

On vérifie qu'on a alors $\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

iii) Comment ces fonctions permettent-elles, en revenant à des fonctions réelles, de s'approcher de la solution du problème du paramétrage de l'hyperbole posé au 2) c) (iii) ?

b) **Définition H.P. des fonctions ch et sh à l'aide des cos et sin complexes** On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On vérifie alors $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}(x) \in \mathbb{R}$ et qu'on a la relation fondamentale :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1. \quad (*) \text{ Attention à l'ordre! }$$

Rem. A ce stade, on ne sait pas si l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (\operatorname{ch}(t), \operatorname{sh}(t))$ va réaliser un *paramétrage* de l'hyperbole $\mathcal{H}$, mais en tous cas, elle arrive *dans* $\mathcal{H}$.

En fait, on voit qu'elle ne peut pas être surjective, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t) > 0$, donc elle arrive dans $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$.

3) Etude plus standard des fonctions ch, sh, th : COURS

La seule déf. à retenir : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, et $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$,

appelées cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique respectivement.

- Faire l'étude : pour chacune : parité, dérivée, variations, concavité, limites en $\pm\infty$.
- Nature des branches infinies : courbe asymptote d'équation $y = e^x/2$ pour ch et sh (qu'est-ce que cela signifie?), droites asymptotes $y = \pm 1$ pour th.
- Savoir tracer ces courbes rapidement.
- Equivalents utiles : $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$, $\operatorname{th}(x) \underset{0}{\sim} x$. (à justifier).
- Bijektivité du sh de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de $\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}^+}$ de $\mathbb{R}^+$ dans ? : à justifier.
Les fonctions réciproques sh^{-1} et $(\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}^+})^{-1}$ se notent Argsh et Argch mais ces *noms de fonctions* ne sont plus au programme. Noter que la notation sh^{-1} est ici tout à fait légitime.
- Conséquence : théorème de paramétrage de l'hyperbole.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists ! t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \operatorname{ch}(t), \\ y = \operatorname{sh}(t). \end{cases}$$

4) Une autre raison d'être des fonctions hyperboliques

a) **Théorème** (*dém. importante : Analyse-Synthèse*) toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $f = p + i$ avec p fonction paire et i fonction impaire.

Bien retenir le principe de la preuve : C.N. donne les candidats puis validation des candidats

Terminologie : p s'appelle la *partie paire* de f et i la *partie impaire* de f .

- Application ici à la fonction exp : quelle est la partie paire de exp, sa partie impaire ?

5) Propriétés algébriques des fonctions hyperboliques : exercices

a) La seule formule à retenir : $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$: attention à l'ordre !

b) **Formules d'additions**

Exercice : trouver les formules donnant $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{th}(a+b)$, analogues au cas des fonctions trigo, mais attention aux signes.

Méthodes possibles :

(M1) conjecturer puis vérifier avec la déf. de ch et sh (calcul sur les exp.) : pas la plus jolie !

(M2) Utiliser le fait que $e^a = \operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a)$: à mon avis la plus jolie.

Départ : $\operatorname{ch}(a+b) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \frac{1}{2}(e^a e^b + e^{-a} e^{-b}) = \dots$

(M3) (qui demande de retenir l'écriture complexe H.P. du 2)) :

- généraliser les formules $\cos(a+b)$ (etc) au cas de a, b complexes,
- appliquer $\operatorname{ch}(x) = \cos(ix)$ et $\operatorname{sh}(x) = -i \sin(ix)$.

c) **Equations avec des fonctions trigonométriques hyperboliques**

Exercice : résoudre l'équation $2\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = 5$.

Méthode : c'est beaucoup plus simple qu'en trigo. usuelle car on peut tout écrire avec l'exp. réelle.

Parfois cependant, il est plus agréable d'utiliser les formules sur $\operatorname{sh}(a+b)$ etc, cf. planche.