Chap. B2 : fonctions usuelles (suite)

III Relations de comparaison, pratique de l'étude des limites

Cadre pour tout ce III : on fixe un $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, on considère des fonctions $f, g, \ldots$ qui sont définies sur un "voisinage au moins d'un côté de x_0 (privé de x_0)" i.e. de la forme $]x_0 - \alpha, x_0[$ p.ex. si $x_0 \in \mathbb{R}$, et qui ne **s'annulent pas** sur ce voisinage.

1) Négligeabilité :

a) Définition : (pour $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$) : $\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\ll} g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0}$.

Autre notation (plus utilisée par le programme) : $\boxed{f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))}$.

Sens de cette notation : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

On dit alors que f est négligeable devant g ou que g est prépondérant devant f en x_0.

Prop. La relation négligeable est *transitive* : si $f \underset{x_0}{\ll} g$ et $g \underset{x_0}{\ll} h$ alors $f \underset{x_0}{\ll} h$.

Remarque : on peut étendre la fonction précédente au cas où f s'annule : il suffit de supposer que g ne s'annule pas, même si f s'annule. Par exemple on peut considérer la fonction nulle comme négligeable devant toutes les fonctions.

b) Premiers exemples : fonctions $x \mapsto x^\alpha$ entre elles, en 0, en $+\infty$.

c) Fonction logarithme :

(i) Thme de Croissance Comparée (*dém.*) : $\ln x \underset{x \to +\infty}{\ll} x^\alpha$ pour tout $\alpha > 0$,

Généralisation immédiate : $\ln^\beta(x) \underset{x \to +\infty}{\ll} x^\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

(ii) En zéro : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

d) Fonctions exponentielles : (thme de C. Comparée *dém.*)

(i) $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{\ll} a^x$ pour tout $\alpha > 0$ et tout $a > 1$.

(ii) Pour $1 < a < b$, $a^x \underset{x \to +\infty}{\ll} b^x$.

(iii) Pour $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x)^\alpha a^x = 0$.

e) Encore plus lent, encore plus rapide : $\ln(\ln(x)) \underset{+\infty}{\ll} \ln(x)^\alpha$, ou $a^x \underset{+\infty}{\ll} x^x$.

2) Equivalents

a) $\boxed{\textbf{Définition : } f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \dfrac{f}{g} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1.}$

Cette déf. n'a de sens que pour des fcts qui ne s'annulent pas dans un $V(x_0) \setminus \{x_0\}$, cf. le cadre du début du III.

b) Dans une somme, importance du terme prépondérant (éventuel) :

(i) Prop. : si $g = f_1 + f_2$ et $f_2 \underset{x_0}{\ll} f_1$ alors $g \underset{x_0}{\sim} f_1$.

(ii) Généralisation à une somme finie : *dans une somme l'équivalent est donné par le terme prépondérant.*

(iii) Exemple des polynômes : $p(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$, où n =deg(p).

(De même, en 0, l'équiv. de $p(x)$ est donné par le monôme de plus bas degré).

c) Lien équivalent/limites :

(i) "Deux fonctions équivalentes ont même limite " :
si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.

(ii) Cas des limites finies non nulles : si $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x) \sim \ell$.
Donc, pour $\ell \in \mathbb{R}^*$, toutes les fonctions tendant vers ℓ en x_0 sont équivalentes entre elles.

Moralité : pour les limites finies non nulles, l'équivalent ne donne pas de renseignement plus intéressant que la limite !

(iii) En revanche : le résultat du (ii) est faux pour $l = 0$ ou $l = \pm\infty$.

Deux moralités : • Ce sont pour les limites 0 et ∞ que la notion d'équivalent est beaucoup plus riche que la notion de limite.
• NE JAMAIS ECRIRE EQUIVALENT A ZERO !

d) Traduction des formules connues en termes d'équivalents :

(i) Les amis :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x,\ \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x,\ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x,\ e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

(ii) Remarque : la relation $\sim$ est *réflexive, symétrique, et transitive*. En particulier, toutes les fonctions du (i) sont équivalentes entre elles en 0.

(iii) **Important** :

Pourquoi $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ est beaucoup plus précis que $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$.

(iv)**Rem. pratique :** Pour les limites en un point $x_0 \neq 0$, on posera souvent $x = x_0 + t$ pour avoir $t \to 0$ et utiliser les formules connues en 0.

Seul exemple de formule à retenir avec un x qui ne tend pas zéro : $\boxed{\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1}$.

e) Lien équivalent/ négligeable :

(i) on donne $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors

• si $h(x) \underset{x_0}{\ll} f(x)$ alors $h(x) \underset{x_0}{\ll} g(x)$.

• Si $f(x) \underset{x_0}{\ll} h(x)$ alors $g(x) \underset{x_0}{\ll} h(x)$.

(ii) Exemple : détermination du terme prépondérant dans $f(x) = \sin(2x^2) + \ln(1 + x^3) + e^{2x^4} - 1 + \tan(4x)$.

(iii) Prop. caractéristique (lien complet entre équivalent et négligeable) :

$$\begin{aligned}
f \underset{x_0}{\sim} g \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f}{g} \underset{x_0}{\longrightarrow} 1,\\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)\alpha(x), \quad \text{avec } \alpha(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1,\\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,\\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + g(x)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,\\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{en } x_0.
\end{aligned}$$

3) Opérations possibles avec équivalents

a) Produit, quotient.

Application : équivalent des fonctions rationnelles.

Publicité pour les équivalents ! Comment on étudie : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x^2) - 1}{\sin(x/5)\ln(1 + 7x)}$.

b) Puissance entières et pour les fonctions positives, puissances réelles d'équivalents

(i) **Prop.** (*dém. triviale*) Si $f \sim g$ et si α est fixé alors $f^\alpha \sim g^\alpha$.

(ii) **Attention :** (notamment pour les suites) si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et α fixé, on a bien $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

En revanche, si α varie avec n c'est faux.

Contre-exemple avec $(1 + \frac{1}{n})^n$.

c) Pas de composition en général, mais utilisation (en sens inverse i.e.) « en poupée russe » des formules connues :

Exemple : déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1 + \tan(\sin(x))))}{\tan(2x)}$.

Attention à l'ordre des simplifications : de l'extérieur vers l'intérieur (poupée russe).

d) Pas de somme d'équivalents !

(i) Résultat positif connu : *dans une somme, l'équivalent est donné par le terme prépondérant.*

(ii) Si plusieurs termes de même ordre :

$$\boxed{\text{traduire les équivalents avec des égalités avec } o :}$$

p.ex. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \Leftrightarrow \sin(x) = x + o(x)$ quand $x \to 0$.

$\boxed{\text{Dans cette égalité étrange, le terme } o(x) \text{ signifie « une fonction négligeable devant } x \text{ en } 0 \text{ »}}$

Illustration : Sur l'exemple de $f(x) = \sin(x) - \tan(x)$.

L'avantage est : *qu'on peut ajouter les* $o()$.

4) Excursion : zoologie des $o()$

Résumé de ce qu'on a constaté en étudiant les $o()$ *dans leur milieu naturel : les exercices sur les limites et équivalents....*

a) Une égalité avec $o()$: un drôle de égal !

En effet si pour $x \to 0$, $f(x) = o(x^2)$ alors $f(x) = o(x)$ mais la récip. est fausse ! Autrement dit ne pas écrire $o(x) = o(x^2)$! ! !

b) La vérité sur la notation $g = o(f)$: on devrait dire $g \in o(f)$ où $o(f)$ désigne *l'ensemble des fonctions négligeables devant f.*

Ce qu'on devrait écrire l'inclusion d'ensemble $o(x^2) \subset o(x)$.

Néanmoins, on utilise ces égalités avec $o()$ car elles vont rendre vraiment très pratique le calcul des limites ! Il faut seulement avoir conscience de quelques propriétés des $o()$.

Noter aussi que dans le lien $o/\sim$: si $f \sim g$ alors $o(f) = o(g)$, là on a une *vraie* égalité d'ensembles. Ainsi $o(\sin(x)) = o(x)$ etc.

c) La voracité et la tenacité des $o()$: de l'art du calcul avec une poubelle

(toutes les formules avec une variable x sont données pour $x \to 0$)

• ils mangent les constantes multiplicatives : si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $o(\lambda f) = o(f)$. Par exemple $o(17x^2) = o(x^2)$.

• ils se mangent entre eux : $o(x) + o(x) + o(x^3) = o(x)$. Le prépondérant survit seul.

• ils absorbent des puissances de x : $x.o(x) = x.x\varepsilon(x) = x^2\varepsilon(x) = o(x^2)$, et en sens inverse, on peut les factoriser...

Notation pratique $o(1)$: elle désigne une fonction qui tend vers 0.

Bien distinguer un $o(x)$ et un $o(1)$.

• La ténacité des $o()$: $o(x) - o(x) = o(x)$. D'une manière générale, dès qu'on a écrit un $o()$ dans une ligne du calcul, il y aura des $o()$ jusqu'à la fin.

5) Cas des logarithmes et exponentielles :

a) Logarithme d'équivalent (une composition qui « marche souvent ») :

(i) **Prop.** *(H.P. donc redémontrer)* Pour des fonctions f, g qui ont une limite $\ell \neq 1$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ en un $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, si $f \sim g$ alors $\ln(f) \sim \ln(g)$.

N.B. 1 Les seuls cas non triviaux sont les cas où la limite est 0 ou $+\infty$.

N.B. 2 Ce résultat peut s'utiliser sans démonstration à partir d'un certain niveau.

Dém. facile avec l'écriture : $f(x) = g(x)\alpha(x)$ où $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$, $\ln(f(x)) = \ln(g(x)) + \ln(\alpha(x)) = \ln(g(x)) + o(\ln(g(x))$, car $\ln(g(x))$ tend vers l'infini si $\ell \in \{0, +\infty\}$ ou vers une limite finie non nulle si $\ell \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

Dans les exemples concret, cette écriture avec α est une simple factorisation. Exemple : montrer que $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

(ii) Ctre exemple avec deux fonctions qui tendent vers 1 : si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, alors $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} g(x) \underset{x\to 1}{\sim} 1$, mais $\ln(f(x)) = 2\ln(g(x)$, donc $\ln(f(x))$ et $\ln(g(x))$ ne sont pas équivalents quand $x \to 1$.

(iiii) Que faire si les fonctions tendent vers 1 ? C'est facile, dans ce cas $\ln(f(x)) \sim f(x) - 1$.

b) Pas d'exponentielle d'équivalent.

(i) *Ctre-exple* $e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^x$.

(ii) Conséquence : quand on étudie des limites de fonction de la forme $u(x)^{v(x)} = \exp(v(x)\ln(u(x)))$, on pose $g(x) = v(x)\ln(u(x))$, on étudie la limite de g avec des équivalents et ensuite on prend l'exp. *de la limite* et pas de l'équivalent ! Exemple : cf. planche.

(iii) Critère : $e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) - g(x) \to 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(1)$.

Les deux informations $f/g \to 1$ et $f - g \to 0$ sont complètement indépendantes !

Savoir trouver des exemples dans les deux sens.

6) Traduction de la dérivabilité avec une égalité avec $o()$: D.L.$_1$

a) Prop. si f est dérivable en 0, de dérivée ℓ si et seulement si, $f(x) - f(0) = \ell x + o(x)$.

b) Ainsi pour les fonctions dérivables, on a ce qu'on appelle un D.L.$_1$: $f(x) = f(0)+f'(0)x+o(x)$.

c) Exemple : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ en 0.

Ceci donne un équivalent de $(1+x)^\alpha - 1$.

d) Les ZAMIS : $\sin(u) \sim u$, $\tan(u) \sim u$, $\ln(1+u) \sim u$ et $e^u - 1 \sim u$ sont aussi des DL$_1$.

Pour l'exp. l'avantage de l'écriture DL$_1$ est l'*équivalence* des deux équations $e^u - 1 = u + o(u)$ et $e^u = 1 + u + o(u)$, contrairement au cas des équivalents.