

**Chap. B2 : fonctions usuelles et relations de comparaisons**

...ubi e denotat numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est 1.  
première définition de e, Euler 1736, *Mechanica*.

**I Fonctions polynomiales et rationnelles**
**1) Définition des fonctions polynomiales :**

**a) Définition :** Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On dit que  $f$  est une fonction polynomiale si, et seulement si, il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  et un  $(n + 1)$ -uplet  $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

b) **Remarque :** Toutes les fonctions constantes sont des fonctions polynomiales, en prenant  $n = 0$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0$ . En particulier la fonction nulle est polynomiale.

c) **Terminologie :** Une fonction polynomiale de la forme  $f : x \mapsto ax^k$  avec  $(a, k) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}$  s'appelle un *monôme*. Une fonction polynomiale (on dit aussi un *polynôme*) est donc une somme de *monômes*.

d) **Notation :** On notera  $\mathbb{R}[x]$  l'ensemble des fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**2) Théorème sur les zéros des fonctions polynomiales réelles**

**Théorème :** Soit  $f \in \mathbb{R}[x]$  et  $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tels que  $a_n \neq 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Alors  $f$  admet au plus  $n$  zéros dans  $\mathbb{R}$ .

Preuve par récurrence, détail de la rédaction laissés en exercice : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P(n)$  la propriété suivante : [pour toute fonction  $f \in \mathbb{R}[x]$  vérifiant qu'il existe un  $(n + 1)$ -uplet  $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , on a :  $\text{Card}(Z(f)) \leq n$ .]

Montrer par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Indication :* pour l'hérédité, appliquer l'H.R. à  $f'$ , le signe de  $f'$  donnant de la stricte monotonie de  $f$  sur chaque intervalle entre deux zéros de  $f'$ .

*Variante possible :* raisonner par l'absurde et montrer, avec le T.A.F., que si  $f$  admet au moins  $n + 2$  zéros, alors  $f'$  en admet au moins  $n + 1$ , car le T.A.F. dit qu'entre deux zéros de  $f$ , il y a au moins un zéro de  $f'$ .

**3) Application à l'unicité de l'écriture d'une fonction polynomiale :**

**a) Théorème** Soit  $f \in \mathbb{R}[x]$  qui n'est pas la fonction nulle. Alors il existe un unique entier  $n \in \mathbb{N}$  et un unique  $(n + 1)$ -uplet  $(a_n, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $a_n \neq 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

**b) Définition :** Avec les notations du théorème, l'entier  $n$  s'appelle le *degré* de  $f$  et sera noté  $\text{deg}(f)$ . Le coefficient  $a_n$  sera appelé *coefficient dominant* de  $f$  et sera noté (ce n'est pas standard)  $\text{CD}(f)$ . Enfin le monôme  $x \mapsto a_n x^n$  sera appelé *monôme dominant* de  $f$  et noté  $\text{MD}(f)$ .

Par exemple, les fonctions constantes non nulles sont les fonctions polynomiales de degré 0.

**Convention :** On convient que la fonction nulle a pour degré :  $-\infty$

c) **Remarque :** C'est le théorème d'unicité du (i) qui justifie la phrase "on identifie" que vous utilisez sans y penser quand vous dites par exemple  $[\forall x \in \mathbb{R}, (a - 1)x^2 + (2b + a)x + (c - 2) = 0] \Leftrightarrow (a - 1) = 0$  et  $2b + a = 0$  et  $c - 2 = 0$ .

d) **Preuve du théorème d'unicité du a) :** Par l'absurde si on avait deux écritures différentes de la même fonction polynomiale  $f$ , la différence de ces deux écritures donnerait une écriture de la fonction nulle comme fonction polynomiale avec au moins un coefficient non nul, or une telle fonction n'a qu'un nombre fini de zéros par le thm. du 2), *contradiction* □

## 4) Fonctions rationnelles

## a) Définitions :

a) (i) **Déf.** On dit que  $f$  est une *fonction rationnelle* si, et seulement si, il existe deux fonctions  $(p, q) \in \mathbb{R}[x]^2$  où  $q$  n'est pas la fonction nulle, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus Z(q), f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

(ii) Par exemple :  $f(x) = \frac{x^7 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 + 6}$ .

(iii) **Non-unicité de l'écriture** : par exemple si  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$  (1), on peut aussi écrire  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad (2).$$

On a donc deux écritures distinctes de l'expression de la *même* fonction rationnelle. (Ici l'écriture (2) montre que  $f$  se prolonge de manière  $\mathcal{C}^\infty$  au point 1).

(iv) **Définition du degré** On montrera que quelle que soit l'écriture d'une fonction rationnelle  $f$  comme quotient  $p/q$  de deux polynômes, on peut définir  $\deg(f) = \deg(p) - \deg(q) \in \mathbb{Z}$  (qui donne la même valeur pour toutes ces écritures).

Par exemple, pour la fraction  $f$  de l'exemple (iii),  $\deg(f) = -1$  (avec les deux écritures). Pour celle du (ii),  $\deg(f) = 4$ .

b) Si  $\deg(f) \geq 0$ , méthode de la division euclidienne *sur des exemples*.

*Sur les notes manuscrites !*

Connaître la forme du résultat :  $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$  avec  $\deg(r) < \deg(b)$  donne :

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}.$$

## c) Applications de la division euclidienne pour les fonctions rationnelles :

(i) Mise en évidence des asymptotes en  $\pm\infty$  pour les graphes des fractions de degré 1 et de l'absence d'asymptotes pour celles de degré au moins deux.

**Définition générale** : si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  on dit qu'une droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  est *asymptote* à  $\Gamma_f$  ssi  $f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

**Illustration.**

(ii) Calcul de primitive (cf. B3) : exemple d'une fonction homographique.

## 5) Retour aux polynômes : lemme de factorisation

a) **Lemme de factorisation** : Si  $p \in \mathbb{R}[x]$  et si  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un zéro de  $p$  alors il existe un polynôme  $q$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = (x - \alpha)q(x)$ .

*Preuve avec la division euclidienne.*

## b) Exemple d'applications connues :

(i) Si  $p$  est un polynôme du second degré avec  $\Delta \geq 0$  : lien coefficient/racines.

(ii) Si  $p$  est un polynôme du troisième degré : décomposition comme produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.

## II Fonctions logarithme, exponentielles, puissances réelles :

## 1) Logarithme :

*Logos : langage ici plutôt relation, arithmos : nombre.*

## a) Premières conditions pour l'étude de l'équation fonctionnelle :

Sur un intervalle  $I$ , on cherche les fonctions  $f$  telles que  $\forall (x, y) \in I^2 f(xy) = f(x) + f(y)$  (E), autres que la fonction nulle.

*Ceci est un exercice, mais n'est pas un résultat dans la lettre du programme.*

Première conditions sur  $I$  :

(i) Pourquoi cet intervalle ne peut pas contenir 0 (ii) ni être inclus dans  $\mathbb{R}^{-*}$  ?

(iii) En supposant  $1 \in I$ , pourquoi a-t-on :  $f(1) = 0$  ?

b) Dans l'hyp.  $f$  dérivable, obtention d'une C.N. sur  $f'$

**Exercice** (*A savoir bien refaire*) Si  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  vérifiant l'équation fonctionnelle (E) alors il existe un  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in I, f'(x) = a/x$ .

**Conclusion** Si  $I$  est un intervalle contenant 1 et  $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  vérifie l'équation fonctionnelle (E) alors il existe un  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in I, f(x) = \int_1^x \frac{a}{t} dt$ .

*Fin de l'exercice.*

c) **Réciproque (Thème du programme)** : si on considère  $I = \mathbb{R}^{++}$  et  $a \in \mathbb{R}$  quelconque, et la fonction  $f : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{a}{t} dt$  alors  $f$  vérifie bien l'équation fonctionnelle (E).

*Pv. admise* : exercice ici, sera reprise au B3 avec la formule du changement de variable.  $\square$

**Définition** :  $\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ .

d) **Prop. algébriques du logarithme : conséquence de l'équation fonctionnelle**

(i)  $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(x^n) = n \ln(x)$ .

(ii)  $\forall x > 0, \ln(1/x) = -\ln(x)$ .

*Preuve* : Soit  $x > 0$ . L'équation fonctionnelle du  $\ln$  donne :  $\ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$ .

Donc  $\ln(x) + \ln(1/x) = \ln(1) = 0$ . Donc  $\ln(1/x) = -\ln(x)$ .  $\square$

(iii)  $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(x^n) = n \ln(x)$

*Preuve* : Soit  $x > 0$  et soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a la concl. par (i). Si  $n = 0$ , on a  $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \ln(x)$ .

Si  $n = -m$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\ln(x^n) = \ln(1/x^m) = -\ln(x^m)$  par (ii) et  $\ln(x^m) = m \ln(x)$  par (i), donc  $\ln(x^n) = -m \ln(x) = n \ln(x)$ .  $\square$

e) **Prop. analytiques : étude de la fonction  $\ln$ .**

(i) Variations : comme par déf.  $\ln'(x) = 1/x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^{++}$  on sait que  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{++}$ .

(ii) Cinq limites à savoir (*avec dém. !*) :

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \end{array}$$

(iii) Conséquences pour les branches infinies : les limites (1) et (3) montrent que  $\Gamma_{\ln}$  n'admet pas de droite asymptote en  $+\infty$ .

La limite (2) dit que l'axe ( $Oy$ ) est asymptote à  $\Gamma_{\ln}$  en 0. La concavité du  $\ln$  aide au tracé.

(iv) **Une inégalité importante** : comme  $\ln$  est *concave*, son graphe est en dessous de sa tangente en tout point, notamment au point d'abscisse 1 donc pour tout  $x > 0, \ln(x) \leq (x-1)$  ou encore, en posant  $x = 1+u$  :

$$\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$$

f) **Bijektivité**

**Prop.**  $\ln : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$  est *bijective*.

*Preuve* - • Comme  $\ln' > 0$  sur  $\mathbb{R}^{++}$ , *intervalle*, on sait que  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{++}$  donc injective.

• Comme  $\ln$  est continue (car dérivable), strictement croissante, et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , par théorème (T.V.I), on sait que  $\ln(]0, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$ , donc  $\ln$  est surjective.  $\square$

g) **Dérivées, Primitives**

(i) Formule (SANS VALEUR ABSOLUE à droite!) :  $\frac{d}{dx} (\ln |u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

(ii) Primitives : (VALEUR ABSOLUE dans le résultat).  $\int_a^x \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \ln |u(x)| + k$

## 2) Fonction exponentielle

### a) Définition et prop. de la dérivée :

(i) **Déf.** On a démontré au 1) f) que  $\ln : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  est *bijective*, on *définit* :  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  comme sa fonction réciproque.

(ii) **Prop.** La fonction  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x)$ .

*Preuve* — On applique le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque. Comme  $\ln$  est dérivable, bijective et que sa dérivée ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , sa fonction récip.  $\exp$  est dérivable sur  $\ln(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} : \exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$ .  $\square$

(iii) **Exercice** (cours au B3) : montrer que  $\exp$  est l'*unique* fonction  $f$  dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les deux conditions  $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1. \end{cases}$

### b) Propriétés algébriques de $\exp$

(i) **Equation fonctionnelle** :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

*Preuve* — Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Notons  $(F)$  l'équation  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$  à démontrer.

Comme  $\ln$  est *bijective*, on peut montrer  $(F)$  en montrant que les deux membres ont même logarithme.

Or d'un côté  $\ln(\exp(x + y)) = (x + y)$  (1) par déf. de  $\exp = \ln^{-1}$ .

De l'autre  $\ln(\exp(x) \cdot \exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y))$  par l'équation fonctionnelle du  $\ln$  et donc  $\ln(\exp(x) \cdot \exp(y)) = x + y$  (2). Avec (1) et (2), on a donc prouvé  $(F)$ .  $\square$

(ii) **Prop.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$ .

*Preuve* — Se déduit du (i) par réc. facile (idem 1) d) (i)).  $\square$

Exercice : montrer ensuite que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$ .

(iii) **Notation** : on note  $e = \exp(1)$ , appelé *nombre d'Euler*.

Le (ii) dit que pour tout  $n \in \mathbb{Z}, \exp(n) = e^n$ .

**Notation importante** —  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{on note } \exp(x) = e^x$ .

**Scholie.** — On définit ainsi pour la première fois une "puissance  $x$ " pour un  $x$  non rationnel, cette déf. étant légitime puisque pour les  $x$  entiers (et même rationnels) elle coïncide bien avec l'ancienne notion.

### c) Propriétés analytiques : étude de la fonction $\exp$

(i) Pourquoi  $\exp$  est-elle strictement croissante ?

- comme fonction récip. d'une fonction strictement croissante (*savoir dém. en toute généralité*)
- ou bien parce que  $\exp' = \exp > 0$ .

(ii) Pourquoi  $\exp$  est-elle convexe ?

- comme fonction récip. du  $\ln$  qui est concave et croissante (*exercice : dém. en toute généralité*)
- ou bien parce que  $\exp'' = \exp > 0$ .

**Une inégalité importante** : comme  $\exp$  est *convexe*, son graphe est au-dessus de sa tangente en tout point, notamment au point d'abscisse 0 donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$$

(iii) Cinq limites à bien connaître :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) \stackrel{(1)}{=} +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} \stackrel{(3)}{=} +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} \stackrel{(5)}{=} 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) \stackrel{(2)}{=} 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) \stackrel{(4)}{=} 0,$$

*Preuve* : • Pour (1) il est facile de faire une preuve directe en disant que  $\exp$  est croissante et non majorée (car grâce aux prop. algéb.  $\exp(n) = e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ).

On peut aussi déduire (1) de la minoration donnée au (ii) :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .

- Pour (2) : comme  $e^x = 1/e^{-x}$ , on la déduit de (1).

**Remarque** Il est aussi instructif de déduire les deux premières limites du lemme général suivant :

**Lemme** (*admis, cf. chap. F, ou exercice assez facile avec la déf. de la limite et la monotonie*)

Soit  $(a, b, c, d) \in (\overline{\mathbb{R}})^4$  avec  $a < b$  et  $c < d$  et soit  $f : ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$  une bijection continue.

- Si  $f$  est strictement croissante alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} d$ .
- Si  $f$  est strictement décroissante alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} d$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c$ .

- Le lemme donne immédiatement les deux premières limites.
  - Pour (3) : méthodes variées à partir de l'inégalité déjà vue  $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t$ ,
  - La limite (4) se ramène à (3) via  $xe^x = x/e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$  avec (3).
  - La cinquième limite est celle des taux de var. de exp entre  $u$  et 0, qui vaut donc  $\exp'(0) = 1$ .
- (iii) Nature des branches infinies (avec le (ii)) : pas de droite asymptote en  $+\infty$  car  $\exp(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

#### d) Dérivées-Primitives :

(i) Formule de dérivation :  $\frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = u'(x)e^{u(x)}$ .

Quand on dérive  $v(x)e^{u(x)}$  on garde le  $e^{u(x)}$  en facteur.

(ii) Primitives : pour  $f(x) = e^{ax}$ ,  $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + k$ , mais **attention** cela seulement pour un  $a$  constant !

### 3) Fonctions construites à partir de exp et ln

#### a) Logarithme à base $a$ : pour $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ .

(i) **Définition** Soit  $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ . Pour tout  $x > 0$ , on pose  $\log_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ .

(ii) Les deux fonctions  $\log_a$  les plus utilisées sont  $\log_{10}$  et  $\log_2$ .

(iii) Toutes les fonctions  $\log_a$  ont les même prop. algébriques que  $\ln$  : ce sont en fait toutes les fonctions non nulles, dérivables sur  $\mathbb{R}^{+*}$  vérifiant l'équation fonctionnelle du 1) a).

(iv) Prop. analytiques : attention suivant que  $a < 1$  ou  $a > 1$ .

Si  $a > 1$ , le graphe est analogue à celui du  $\ln$ . Si  $a < 1$  tout est "inversé" car  $\ln(a) < 0$ .

#### b) Mise d'un nombre positif à une puissance réelle quelconque :

(i) **Définition** : pour tout  $a > 0$  et tout  $b \in \mathbb{R}$ , on pose  $a^b = \exp(b \ln(a))$ .

**N.B.** On sait que dans le cas où  $b$  est entier, cette déf. est cohérente avec les déf. connues.

(ii) A partir de cette définition, on peut considérer deux familles de fonctions (bien différentes) suivant qu'on fixe l'exposant  $b$  et qu'on considère  $a$  comme variable ou l'inverse :

(iii) **Déf.** • Si on fixe un  $a > 0$ , la fonction  $x \mapsto a^x$  sera appelée *exponentielle à base  $a$* .

• Si on fixe un  $b \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto x^b$  sera appelée *fonction puissance  $b$* .

#### c) Etude des fonctions exponentielles à base $a$ : $x \mapsto a^x$

(i) **Définition** : pour tout  $a > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $a^x = e^{x \ln(a)}$ .

(ii) Prop. Pour tout  $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ , la fonction  $x \mapsto a^x$  est la fonction récip. de la fonction  $\log_a$ . (*Preuve immédiate en écrivant la composée!*)

Exemple : si on cherche pour un entier  $N$  donné, le plus grand entier  $k$  tel que  $10^k \leq N$  (de sorte que  $k+1$  est le nombre de chiffres de son écriture décimale) : on a  $10^k \leq N < 10^{k+1}$  qui équivaut à  $k \leq \log_{10}(N) < (k+1)$  i.e.  $k = \lfloor \log_{10}(N) \rfloor$ .

(iii) Prop. algébriques : (idem exp.)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall a > 0, a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ .

(iv) Prop. analytiques : L'essentiel : pour toute question, toujours revenir à l'écriture "exp."

• Par exemple pour le calcul de la dérivée :  $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln(a)}) = \ln(a)e^{x \ln(a)} = \ln(a)a^x$ .

Ainsi : si  $a > 1$ ,  $x \mapsto a^x$  est st. croissante sur  $\mathbb{R}$ , si  $a < 1$  elle est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour l'étude des limites : encore avec l'écriture exp.

Si  $a > 1$  même limite que exp. Si  $a < 1$  : inversées Exemple de tracé : pour  $a = 2$  et  $a = 1/2$ .

**d) Fonctions “puissances réelles” :  $x \mapsto x^\alpha$** 

(i) **Définition** : Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit  $f_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ .

Par définition,  $x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}$ .

Coincide si  $\alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  avec (éventuellement, la restriction à  $\mathbb{R}^{+*}$ ) des fonctions du § 1).

(ii) Prop. algéb. idem puissances usuelles :

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ ,  $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$  et  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall x > 0$ ,  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$ .

De même  $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$ .

*Démontrer ces prop. avec la déf. du (i).*

(iii) Prop. analytiques : L'essentiel : pour toute question, toujours revenir à l'écriture “exp.”

• Formule :  $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$  (dém. toujours en revenant à la déf. exponentielle).

• Etude des limites : toujours avec la déf. exp.

Prop. Si  $\alpha > 0$  la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  se prolonge par continuité en 0.

• Tracé simultané et comparaisons des  $\Gamma_{\square^\alpha}$  quand  $\alpha$  varie.

**e) Cas général des fonctions de type  $x \mapsto (u(x))^{v(x)}$  : sur notes de cours**

(i) Toujours revenir à la déf. exponentielle ! En particulier, savoir dériver.

(ii) Exemple de  $(1 + 1/x)^x$ , dérivée (revenir à la déf.), et limites (idem).

(iii) En particulier nouvelle F.I.  $1^\infty$ .

(iv) Autre F.I.  $0^0$ .