

DM 5 : calculs de dérivées n -ièmes un peu impressionnantes...*Pour le jeudi 12 novembre***1) Dérivée n -ième de la Gaussienne**

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$ la fonction Gaussienne dont vous avez utilisé l'intégrale en probabilité au lycée.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n , dont on précisera le degré et le coefficient dominant, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.

N.B. – On ne cherchera pas ici à expliciter P_n voir d).

b) A l'aide de la formule de Leibniz, montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2P_{n-1}(x).$$

c) A l'aide des relations sur (P_n) obtenues au a) et au b), montrer que P_n vérifie l'E.D. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n''(x) - 2xP_n'(x) + 2nP_n(x) = 0$$

d) En déduire une formule explicite pour le polynôme P_n .

Indication – C'est une question plus technique sur les polynômes, utiliser l'unicité de l'écriture des polynômes pour identifier les coefficients des différentes puissances de x .

2) Dérivée n -ième d'une composée à droite par $x \mapsto 1/x$: application à la raie

a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'on note $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(1/x)$ alors g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!(n-1)!}{k!(n-k)!(n-k-1)!} x^k f^{(n-k)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication – Demande des manipulations courageuses sur les factorielles ...

b) En déduire une formule explicite pour la dérivée n -ième de $g : x \mapsto \exp(-1/x)$ (demi-raie sur les positifs)

c) A l'aide de l'exercice précédent, en déduire une formule explicite pour la dérivée n -ième de $g : x \mapsto \exp(-1/x^2)$.

Remarque : Là c'est vraiment juste pour faire une grosse formule !