

Conseils de travail pour les vacances de Toussaint

- Après avoir laissé passer 3 ou 4 jours, se remettre au travail disons au plus tard le mercredi de la première semaine. Travailler 2 heures de maths le matin, 2 heures de maths le soir, *chaque jour* est beaucoup plus profitable que de bourrer les 4 ou 3 derniers jours ! De même pour la physique et les autres matières.. éventuellement avec des rotations sur deux jours... Ne vous couchez pas trop tard pour profiter des matins : on y a l'esprit frais.
- Travailler, d'abord, les cours récents au début des vacances. le programme de colle de la rentrée bien sûr puis les planches.
- Puis enchaîner sur des révisions du cours du B1 (les fameux théorèmes à connaître de manière précise). Revoir aussi les lacunes qui vous pourriez avoir sur le chapitre A (c'est à vous d'essayer de vous connaître là-dessus). Et commencer alors aussi le DM 4 obligatoire ci-dessous (bien sûr là aussi tronçonner le travail de ce DM !)
- Si vous travaillez bien le matin, n'hésitez pas aussi à vous aérer l'après midi... sport, loisirs etc... avant de retravailler en début de soirée... si vous avez séché sur un exercice le matin, il se sera décanté l'après-midi inconsciemment... et vous aurez plus de chance de « trouver » le soir.
- C'est très instructif de voir si vous arrivez ainsi à vous « régler » votre rythme d'organisation... sans le cadre contraignant du lycée... cela sera plus tard crucial dans un an et demi pour les révisions des écrits.

D.M. 4. : fonctions trigonométriques réciproques

Cahier de vacances de la Toussaint : D.M. pour le lundi 2 novembre 2020

C'est un D.M. particulier : son contenu sera au programme de colle de la semaine 7. Il est obligatoire pour tout le monde de rédiger ce D.M.

I Fonctions trigonométriques réciproques :

Tout ce qui suit est à considérer comme du cours ! On suppose connues les propriétés usuelles des fonctions sin et cos, dérivées, formules d'additions etc.

1) Etude de la fonction Arccos :

a) Etude seulement à partir de la définition comme “fonction récip.” :

- i) Démontrer que la fonction $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \rightarrow [-1,1]$ est *bijective*. On appelle $\text{Arccos} : [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$ sa fonction réciproque.

On sera précis et efficace pour justifier la bijectivité.

Je serai sans pitié pour ceux qui écrivent que Arccos est la fonction récip. de $\cos$!
 Arccos est la réciproque de la restriction de $\cos$ à $[0,\pi]$ i.e. $\cos|_{[0,\pi]}$.

- ii) Tracer le graphe de Arccos par symétrie à partir de celui de $\cos|_{[0,\pi]}$.
 iii) Démontrer l'Equivalence Essentielle suivante (à retenir absolument !)

$$\forall x \in [-1,1], \quad y = \text{Arccos}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(y) \\ y \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(Même si vous trouvez cela évident, raison de plus pour savoir le justifier !)

- iv) Quel est l'ensemble de définition D_f de $f : x \mapsto \cos(\text{Arccos}(x))$? Démontrer que : $\forall x \in D_f, \cos(\text{Arccos}(x)) = x$.
 v) Quel est l'ensemble de définition D_g de $g : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x))$? Quel est son ensemble image $g(D_g)$?

En utilisant éventuellement l'équivalence du (iii) donner une expression explicite simple de $\text{Arccos}(\cos(x))$ sur chaque intervalle $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

N.B. – Si vous n'y arrivez pas du premier coup à ce stade, vous pouvez réessayer après avoir fait le d).

- b) **Une formule sympa** : Démontrer et retenir que $\forall x \in [-1,1], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

c) Propriétés analytiques simples :

- i) Que dire de la continuité de Arccos ? *La justifier à l'aide d'un théorème.*
 ii) De sa dérivabilité? Démontrer et retenir la formule donnant sa dérivée.
On sera soigneux sur la façon de citer correctement le théorème utilisé.
(A mettre dans votre tableau de formules...)

d) **Le méchant $\text{Arccos} \circ \cos$ enfin apprivoisé**

Définition – Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite affine par morceaux si, et seulement si, on peut écrire I comme une réunion disjointe d'intervalles $I = \bigcup_{k \in A} I_k$ sur lesquels $f|_{I_k}$ est une fonction affine pour tout $k \in A$ (A étant un ensemble d'indices, fini ou pas).

On considère à nouveau la fonction $g = \text{Arccos} \circ \cos$: on va retrouver les formules du a) (v) d'une manière différente (plus facile ?) :

- (i) Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- (ii) Sur quel ensemble g est-elle dérivable, et que vaut alors sa dérivée ?
- (iii) Que dire de sa périodicité ?
- (iv) En remarquant que $\forall x \in [0, \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$, en déduire une façon très simple de tracer le graphe de g .
- (v) (Ré)-obtenir ainsi les formules explicites du a) (v) pour $\text{Arccos} \circ \cos$ sur chaque I_k .

Retenir que $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$ gentil, et $\text{Arccos}(\cos(x))$ est plus méchant, mais apprivoisé

2) Etude de la fonction Arcsin :

a) **Etude seulement à partir de la définition comme “fonction récip.” :**

Reprenez les points du 1. a) (i), (ii), (iii) **sans démonstration cette fois** pour la fonction $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ et sa réciproque Arcsin . Retenez notamment l'équivalence essentielle correspondante.

(iv) Montrer qu'en outre la fonction réciproque d'une fonction impaire est toujours impaire et donc que Arcsin est impaire.

(v) Déterminer $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}(u)}{u}$ et mettez ce résultat dans vos amis !

b) **Une autre relation sympa.** De même on montre (non demandé) que $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

c) **Une relation entre Arccos et Arcsin :**

Démontrer la relation importante suivante :

$$\forall x \in [-1, 1], \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \pi/2. \quad (*)$$

de deux façons différentes :

- Première méthode : en dérivant séparément les deux membres de (*), après avoir justifié l'expression de la dérivée de Arcsin
- Deuxième méthode : en comparant le sin des deux membres de (*).

Attention, l'égalité des sin ne suffit pas pour conclure. Considérer ensuite précisément dans quels intervalles vivent les deux membres. Une autre solution peut être de faire passer un des termes de l'autre côté.

d) **Applications aux propriétés de Arccos :**

A l'aide du c) précédent :

- i) Tracer sur un même figure les graphes de Arcsin et Arccos . Que dire ?
- ii) Donner une relation simple entre $\text{Arccos}(-x)$ et $\text{Arccos}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

3) Etude de la fonction Arctan

a) **Etude seulement à partir de la définition comme “fonction récip.”**

Reprenez *sans dém.* tous les points du 1) a) (i) (ii) (iii) pour la fonction $\tan|_{]-\pi/2, \pi/2[} :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$, de réciproque Arctan .

b) **Propriétés analytiques simples**

- i) Que dire de la parité de Arctan ?
- ii) De sa dérivabilité ? Redémontrer et retenir la formule donnant sa dérivée.
- iii) Que dire de $\text{Arctan}(x)/x$ quand $x \rightarrow 0$? (*A mettre dans votre tableau de formules sur les limites*)

c) **Une formule sympa :** Démontrer (et retenir) la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \varepsilon\pi/2 \quad \text{où} \quad \varepsilon = \text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}. \quad (**)$$

Indication pour la preuve –

- Justifier d'abord qu'il suffit de démontrer (**) pour tout $x > 0$.
- Prouvez la formule en utilisant une des deux méthodes vues pour la formule (*) du 2.b). Pour l'une des deux, il est préférable de séparer les deux tangentes de part et d'autre du signe “=”.

d) **Encore des formules sympas**

Donner des formules simples pour $\sin(\operatorname{Arctan}(x))$ et $\cos(\operatorname{Arctan}(x))$.

Celles-ci ne sont pas à savoir par coeur !

4) **Méthodes pour l'étude et simplification de fonctions composées avec des Arcsin, Arccos, Arctan**

a) **Méthode 1 :**

En dérivant, on trouve une fonction plus simple.

Ensuite, attention à la constante d'intégration, éventuellement sur chaque intervalle

On a déjà vu ce phénomène en étudiant $x \mapsto \operatorname{Arccos} \circ \cos(x)$ au 1) d). La constante d'intégration changeait sur chaque intervalle.

Exercice 1. Etudier (ens. de déf., de dérivabilité, dérivée) et donner une expression simplifiée de $f : x \mapsto \operatorname{arccos}(1 - 2x^2)$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

Mêmes questions qu'à l'exercice précédents, avec étude des variations et tracé du graphe de f .

b) **Méthode 2 :**

Parfois, on peut simplifier sans dériver, juste avec les formules de trigo.

Exercice 3. On reprend la fonction de l'exercice 2. Retrouver l'expression simplifiée de f à l'aide d'un changement de variables et de formules de trigonométries.

5) **Equations avec des Arcsin, Arccos, Arctan**

Ces exercices sont importants car ils testent votre rigueur dans l'analyse et la synthèse d'un problème (C.N vs. C.S) aussi bien que vos techniques (trigo., étude de fonctions...)

La Méthode par C.N. puis C.S. (analyse synthèse) –

1ère étape : en appliquant la fonction $\sin$ (resp. $\cos, \tan \dots$) aux deux membres de l'équation, on obtient une équation plus simple, mais attention seulement des C.N. sur les solutions, i.e. une *inclusion* pour l'ensemble des solutions. Parfois, il est commode de faire passer certains termes de l'autre côté avant de prendre le $\sin$ (resp. $\cos, \tan \dots$)

2ème étape : on doit vérifier parmi les "seuls candidats solutions possibles" quels sont les vraies solutions. Au moins trois méthodes pour cette deuxième étape :

(i) Parfois on peut calculer explicitement si une solution convient.

(ii) Parfois l'étude des fonctions donne (par analyse : variations) le nombre exact de vraies solutions. Par exemple si on sait qu'il y en a une et qu'on a un seul candidat, c'est gagné.

Méthode alternative pas toujours possible : justifier qu'on peut raisonner par équivalence Si les deux membres de l'équation (quitte à faire passer des termes de l'autre côté) vivent dans un ensemble d'injectivité du sinus, cosinus, tangente... dans ce cas, on peut rédiger la résolution par équivalence.

Exercice 4. Résoudre l'équation $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. a) Montrer que l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$ admet une unique solution, sans la déterminer explicitement.

b) Déterminer explicitement la solution de cette équation.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\operatorname{Arcsin}(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = x$.

Solution des exercices du DM 4

Solution 1 a) Ensemble de déf. : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - 2x^2 \in D_{\text{Arccos}}$.

Or $1 - 2x^2 \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$. Donc $D_f = [-1, 1]$.

Dérivabilité : on sait que Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$.

Or $1 - 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $1 - 2x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Par théorème sur la dérivée d'une composée f est dérivable en tout point x de $] -1, 0[\cup] 0, 1[$ et on peut calculer :

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1 - (1 - 2x^2)^2}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = \frac{4x}{2|x|\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{Donc si } x > 0, f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 \arcsin'(x).$$

$$\text{si } x < 0, f'(x) = -2 \arcsin'(x).$$

Donc il existe une constante C telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) = 2 \arcsin(x) + C$, (intervalle fermé par continuité de f aux bornes).

De même il existe une constante C' telle que $\forall x \in [-1, 0], f(x) = -2 \arcsin(x) + C'$, (intervalle fermé par continuité de f aux bornes).

Mais comme $f(0) = 0$ et $\arcsin(0) = 0$, on conclut que $C = C' = 0$.

Donc $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \text{sgn}(x) \cdot 2 \arcsin(x)$.

Solution 2 1) (i) $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 & (1) \\ 2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1] = D_{\text{Arccsin}} & (2) \end{cases}$

Or la condition (1) équivaut à $x \in [-1, 1]$.

Pour (2), on étudie $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x\sqrt{1 - x^2}$. Comme φ est impaire, on l'étudie sur $[0, 1]$.

On sait que φ est dérivable sur $[0, 1[$ et pour tout $x \in [0, 1[, \varphi'(x) = 2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Donc $\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Ainsi φ croît sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ puis décroît sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$.

Comme $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$, et que $\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$, on conclut par continuité et variations que $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$ et par imparité que $\varphi([-1, 1]) = [-1, 1]$.

On conclut donc que la condition (1) entraîne la condition (2) et donc que $D_f = [-1, 1]$.

Par théorème généraux f est continue sur D_f .

(ii) L'étude faite au (i) donne aussi l'ensemble de dérivabilité de f . En effet, f est dérivable en tous les points de D_f tels que $1 - x^2 \neq 0$ et tels que $\varphi(x) \notin \{-1, +1\}$. En restreignant l'étude à $[0, 1]$ (par imparité), on sait alors par (i) que f est dérivable sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$.

Sur ces deux intervalles, on sait par théorème généraux que pour tout x , on a :

$$f'(x) = \varphi'(x) \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi(x)^2}} = \frac{2}{|2x^2 - 1|} \frac{(1 - 2x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(iii) • Pour tout $x \in I_1 = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, on a $f'(x) = +\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$, donc comme I_1 est un intervalle, on sait qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $f(x) = 2 \text{Arcsin}(x) + C_1$ (la continuité de f permettant de considérer l'intervalle fermé).

Comme $f(0) = 0$, on obtient $C_1 = 0$.

• Pour tout $x \in I_2 =]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, on a $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$, donc il existe une constante C_2 telle que pour tout $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, $f(x) = -2 \text{Arcsin}(x) + C_2$.

Comme $f(1) = 0$, on obtient $C_2 = \pi$.

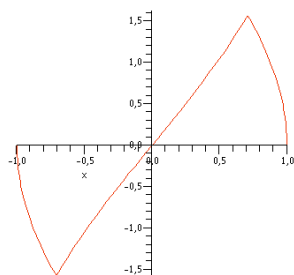
$$\bullet \text{ Par imparité, on conclut que } f : x \mapsto \begin{cases} -2 \text{Arcsin}(x) - \pi & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}], \\ 2 \text{Arcsin}(x) & \text{si } x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}], \\ -2 \text{Arcsin}(x) + \pi & \text{si } x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1], \end{cases}$$

Remarque : On peut aussi écrire $-2 \text{Arcsin}(x) + \pi = 2 \text{Arccos}(x)$.

(iv) Les variations de f sont données par le signe de φ' déjà étudié.

Par imparité, on étudie sur $[0, 1]$. Le point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un point anguleux, et le point d'abscisse $x = 1$ a une tangente verticale.

On obtient le graphe suivant : on peut rajouter les deux demi-tangentes en chaque point anguleux.



Solution 3 comme $D_f = [-1, 1]$, pour tout $x \in D_f$, on peut poser, $t = \text{Arcsin}(x)$. Alors $x = \sin(t)$ et $\sqrt{1-x^2} = |\cos(t)| = \cos(t)$ car $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Donc $f(x) = \text{Arcsin}(2 \sin(t) \cos(t)) = \text{Arcsin}(\sin(2t))$.

Faire alors attention au méchant $\text{Arcsin} \circ \sin$, qui est cependant apprivoisé.

Par imparité, on peut supposer $t \in [0, \pi/2]$ i.e. $x \in [0, 1]$.

On distingue alors deux cas :

(i) si $t \in [0, \pi/4]$ i.e. $x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, alors $2t \in [0, \pi/2]$ et $\text{Arcsin}(\sin(2t)) = 2t$ donc $f(x) = 2t = 2 \arcsin(x)$.

(ii) Si $t \in [\pi/4, \pi/2]$ i.e. $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ alors $2t \in [\pi/2, \pi]$ et $\text{Arcsin}(\sin(2t)) = \pi - 2t$, donc $f(x) = \pi - 2 \arcsin(x)$.

On retrouve la même formule qu'à l'ex. 2.

Solution 4 a) Remarque : L'équation est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, car on a toujours $\frac{1}{1+x^2} \in]0, 1] \subset [-1, 1]$.

C.N. Si x vérifie l'équation alors en appliquant la fonction sinus à cette égalité, on a :

$$\sin(\text{Arcsin}(\frac{1}{1+x^2})) = \sin(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\frac{3}{5})) = \cos(\text{Arccos}(\frac{3}{5})), \text{ donc}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{5} \text{ donc } x^2 = \frac{2}{3}, \text{ donc } x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Mais si on note S l'ensemble des solutions de l'équation, ceci montre seulement que $S \subset \{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.

En fait ici, on peut raisonner par équivalence, comme suit :

$$\text{Arcsin}(\frac{1}{1+x^2}) + \text{Arccos}(\frac{3}{5}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{Arcsin}(\frac{1}{1+x^2}) = \frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\frac{3}{5}).$$

Or par la formule vue dans le cours au 2) c), ceci équivaut à :

$$\text{Arcsin}(\frac{1}{1+x^2}) = \text{Arcsin}(\frac{3}{5}).$$

Par injectivité de la fonction $\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, cette égalité équivaut à :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{5} \text{ et finalement à } x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Cette fois, on a raisonné par équivalence, donc on a montré que $S = \{-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.

Solution 5 a) Notons $f(x) = \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1)$.

i) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

ii) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ par théorème généraux.

iii) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -3\pi/2$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3\pi/2$

donc par (i), (ii), (iii) et le théorème de la bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow]-3\pi/2, 3\pi/2[$ est *bijection*. En particulier $\pi/2 \in]-3\pi/2, 3\pi/2[$ admet un, unique, antécédent par f .

b) Méthode connue : on isole un terme de l'autre côté pour simplifier ..

Soit x solution de (E) alors $\tan(\arctan(x-1) + \arctan(x+1)) = \tan(\pi/2 - \text{Arctan}(x))$ (1).

Par ailleurs, vu l'étude du a), comme, avec les notations du a), $f(0) = 0$ et f est stmt croissante, on sait que $x > 0$.

Donc $\pi/2 - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(1/x)$.

Ainsi l'équation (1) devient $\frac{(x-1) + (x+1)}{1 - (x^2-1)} = \frac{1}{x}$ et donc $\frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x}$ donc $x^2 = 2/3$.

Comme on a vu que $x > 0$, on conclut que $x = \sqrt{2/3}$.

Cette étude montre que la seule solution possible de l'équation de l'énoncé est $2/3$. Or au a), on a montré l'existence d'une solution par surjectivité de f .

On conclut que l'équation de l'énoncé équivaut à $x = \sqrt{2/3}$.

Solution 6

D'abord notons que tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) - \sin^2(x) \in [-1, 1]$ donc l'équation est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

Première condition nécessaire sur x :

Comme pour tout $y \in [-1, 1]$, $\text{Arcsin}(y) \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc si $x \notin [-\pi/2, \pi/2]$ alors l'équation n'admet pas de solutions.

Avec la condition $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on peut résoudre par équivalence :

$$\begin{aligned}
 \text{Arcsin}(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = x &\Leftrightarrow \cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x), \quad \text{en appliquant la fonction sinus, injective car les deux men} \\
 &\Leftrightarrow (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x) - \sin(x) = 0, \\
 &\Leftrightarrow -2\sin^2(x) - \sin(x) + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin(x), \\ -2X^2 - X + 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sin(x), \\ X = -1 \quad \text{ou} \quad X = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = -1 \quad \text{ou} \\ \sin(x) = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = -\pi/2 \quad \text{ou} \quad x = \pi/6 \quad \text{car } x \in [-\pi/2, \pi/2]
 \end{aligned}$$

Conclusion en notant $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \{-\pi/2, \pi/6\}$$