

## Sol. d'ex. pl. 9

**Exercice 2.** Montrer que  $\forall x \in ]0, 1[, x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2)$

**Solution 2 (M1)** Par étude de la fonction  $f : x \mapsto x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) + \ln(2)$ .

On veut montrer que  $\forall x \in ]0, 1[, f(x) \geq 0$ .

Or pour tout  $x \in ]0, 1[, f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ .

Ainsi  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1-x$  (car  $1-x > 0$ ).

Donc  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/2$ .

Ainsi  $f$  est décroissante sur  $]0, 1/2]$  et croissante sur  $[1/2, 1[$  donc  $f$  atteint son minimum en  $1/2$  et ce minimum vaut  $f(1/2) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2) = 0$ .

Donc pour tout  $x \in ]0, 1[, f(x) \geq 0$ .

**(M2)** Pour tout  $x \in ]0, 1[, \text{on pose } g(x) = x \ln(x)$ . L'inégalité à démontrer s'écrit :

$$g(x) + g(1-x) \geq 2g(1/2)$$

c'est-à-dire encore :

$$\frac{g(x) + g(1-x)}{2} \geq g(1/2)$$

Or comme  $1/2$  est bien le milieu du segment  $[x, (1-x)]$  (resp.  $[(1-x), x]$ ), pour montrer qu'elle est vraie, il suffit de montrer que  $g$  est convexe sur  $]0, 1[$ .

Or pour tout  $x > 0$ ,  $g'(x) = 1 + \ln(x)$  et  $g''(x) = 1/x > 0$ , donc  $g$  est convexe sur  $]0, +\infty[$  et la conclusion.

**(M3) Assez originale**

Par concavité du  $\ln$ , pour tout  $(a, b) \in ]0, +\infty[^2$  et tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\ln((1-t)a + tb) \geq (1-t)\ln(a) + t\ln(b).$$

Soit  $x \in ]0, 1[$ . En appliquant l'inégalité précédente à  $t = x$ ,  $a = x$ ,  $b = 1-x$ , on obtient :

$$\ln((1-x)x + x(1-x)) \geq (1-x)\ln(x) + x\ln(1-x) \quad (\dagger)$$

Or

$$\begin{aligned} (\dagger) &\Leftrightarrow \ln(2x(1-x)) \geq (1-x)\ln(x) + x\ln(1-x) \\ &\Leftrightarrow \ln(2) + \ln(x) + \ln(1-x) \geq (1-x)\ln(x) + x\ln(1-x), \\ &\Leftrightarrow x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln(2) \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité à démontrer.  $\square$

**Exercice 3.** Montrer, de deux façons différentes, que  $\forall t \in [0, 1], \exp(t) \leq 2t + 1$

**Solution 3 (M1) Variations :** Soit  $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto \exp(t) - (2t + 1)$ .

Alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi'(t) = e^t - 2$ .

Donc  $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \ln(2)$ .

Donc  $\varphi$  est croissante sur  $[0, \ln(2)]$  et  $\varphi$  est décroissante sur  $[\ln(2), 1]$ .

Donc pour tout  $t \in [0, \ln(2)]$ ,  $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$  et pour tout  $t \in [\ln(2), 1]$ ,  $\varphi(t) \geq \varphi(1) = e - 3 \geq 0$ . Ainsi, on a bien montré que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(t) \geq 0$ , c.q.f.d.

**(M2) Convexité :**

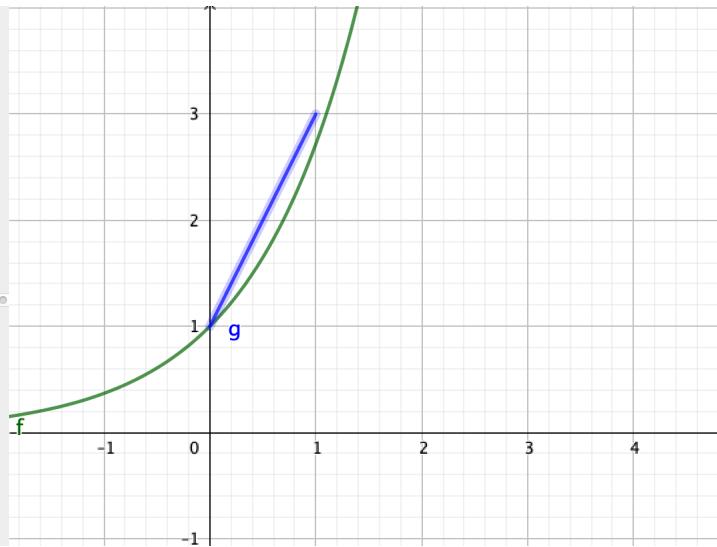
Notons pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = 2t + 1$ . Ainsi  $f(1) = 3$ . Or  $e < 3$ .

Donc le point  $B = (1, 3)$  est dans l'épigraphhe de  $\exp$ .

Le point  $A = (0, 1)$  est sur le graphe de  $\exp$ .

Comme  $\exp$  est convexe, le segment  $[A, B]$  est dans l'épigraphhe de  $\exp$ , or c'est le graphe de  $f$ , d'où l'inégalité demandée.

- ☰ Fonction  
●  $f : y = e^x$   
●  $g(x) = 2x + 1,$



**Exercice 4.** Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}, xy \leq x \ln(x) + e^{y-1}$ .

**Solution 4 (M1) La plus simple** Soit  $y \in \mathbb{R}$  fixé. On étudie les variations de  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x \ln(x) + e^{y-1} - xy$ .

On calcule  $f'(x) = 1 + \ln(x) - y$  ce qui donne un tableau de variation avec  $f$  décroissante sur  $]0, e^{y-1}]$  et croissante après. Comme  $f$  vaut 0 en  $e^{y-1}$  on a la conclusion :  $\forall x > 0, f(x) \geq 0$ .

Comme ceci a été montré pour un  $y \in \mathbb{R}$  quelconque, on a bien la conclusion de l'exercice.  $\square$

**(M2) Pour le défi « trouver la convexité là-dessous »** Soit  $y_0 \in \mathbb{R}$  fixé. On considère :  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln(x) + e^{y_0-1}$ .

(i) Comme  $\forall x > 0, f''(x) = 1/x > 0$ , on sait que  $f$  est convexe.

(ii) On remarque que pour  $x_0 = \exp(y_0 - 1)$  :

- $f'(x_0) = 1 + \ln(x_0) = y_0$ , et
- $f(x_0) = e^{y_0-1}(y_0 - 1) + e^{y_0-1} = e^{y_0-1}y_0 = x_0y_0$ .

donc la tangente à  $\Gamma_f$  admet au point d'abscisse  $x_0$  a pour équation  $y = xy_0$ .

(iii) Comme  $f$  est convexe,  $\Gamma_f$  est au-dessus de sa tangente en ce point  $x_0$ , d'où l'inégalité cherchée :

$$\forall x > 0, x \ln(x) + e^{y_0-1} \geq xy_0$$

comme  $y_0$  est quelconque, on a la conclusion.

**Exercice 5. a)** Montrer que pour tout  $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ ,  $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$ .

b) Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$ .

**Solution 5 a)(M1) La plus simple méthode algébrique...** L'inégalité proposée ne change pas si on échange  $a$  et  $b$ . On peut donc SRdG supposer  $a \geq b$ .

Avec cette hypothèse la conclusion devient  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a - b}$  ( $C$ ).

Comme il s'agit d'une inég. entre nombres positifs, elle est équivalente à l'inégalité entre les carrés des deux membres :

$$(C) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq a - b \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \leq a - b \Leftrightarrow 2b - 2\sqrt{ab} \leq 0.$$

Ainsi ( $C$ )  $\Leftrightarrow b \leq \sqrt{ab}$ . Or avec l'hypothèse  $a \geq b$ , on sait que  $ab \geq b^2$  et donc  $\sqrt{ab} \geq b$ . D'où ( $C$ )

**(M2) plus difficile** En fait, on peut montrer le même résultat en remplaçant  $\sqrt{\phantom{x}}$  par n'importe quelle fonction concave de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui envoie 0 sur 0, mais c'est un exercice un peu plus difficile !

Exercice 1 : montrer que si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est concave et envoie 0 sur 0, alors  $f$  est sous-additive i.e.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ .

Exercice 2 : déduire de l'exercice 1 qu'avec les mêmes hypothèses,  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, |f(x) - f(y)| \leq f(x - y)$ .

b) **(M1) La plus simple, par la convexité de  $x \mapsto x^4$**

On sait que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^4$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  entier, car  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ .

Donc pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$ .

Ceci donne ici  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4 + b^4}{2}$  ce qui, en chassant les dénominateurs, est l'inégalité demandée.

**(M2) méthode algébrique...**  $(a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)^2 \quad (1)$ .

Comme on a pu l'utiliser déjà plusieurs fois, on sait que  $2ab \leq a^2 + b^2 \quad (2)$  car  $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ .

Donc avec (2) dans (1), on obtient :  $(a+b)^4 \leq (a^2 + a^2 + b^2 + b^2)^2 = 4(a^2 + b^2)^2$ .

De même  $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$  avec  $2a^2b^2 \leq a^4 + b^4$ .

D'où la conclusion :  $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$ .