

Sol. d'ex. pl. 9

Exercice 2. Montrer que $\forall x \in]0, 1[, x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2)$

Solution 2 (M1) Par étude de la fonction $f : x \mapsto x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) + \ln(2)$.

On veut montrer que $\forall x \in]0, 1[, f(x) \geq 0$.

Or pour tout $x \in]0, 1[, f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Ainsi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1-x$ (car $1-x > 0$).

Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/2$.

Ainsi f est décroissante sur $]0, 1/2]$ et croissante sur $[1/2, 1[$ donc f atteint son minimum en $1/2$ et ce minimum vaut $f(1/2) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2) = 0$.

Donc pour tout $x \in]0, 1[, f(x) \geq 0$.

(M2) Pour tout $x \in]0, 1[,$ on pose $g(x) = x \ln(x)$. L'inégalité à démontrer s'écrit :

$$g(x) + g(1-x) \geq 2g(1/2)$$

c'est-à-dire encore :

$$\frac{g(x) + g(1-x)}{2} \geq g(1/2)$$

Or comme $1/2$ est la bien le milieu du segment $[x, (1-x)]$ (resp. $[(1-x), x]$), pour montrer qu'elle est vraie, il suffit de montrer que g est convexe sur $]0, 1[$.

Or pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 + \ln(x)$ et $g''(x) = 1/x > 0$, donc g est convexe sur $]0, +\infty[$ et la conclusion.

(M3) Assez originale

Par concavité du \ln , pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\ln((1-t)a + tb) \geq (1-t) \ln(a) + t \ln(b).$$

Soit $x \in]0, 1[$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = x$, $a = x$, $b = 1-x$, on obtient :

$$\ln((1-x)x + x(1-x)) \geq (1-x) \ln(x) + x \ln(1-x) \quad (\dagger)$$

Or

$$\begin{aligned} (\dagger) &\Leftrightarrow \ln(2x(1-x)) \geq (1-x) \ln(x) + x \ln(1-x) \\ &\Leftrightarrow \ln(2) + \ln(x) + \ln(1-x) \geq (1-x) \ln(x) + x \ln(1-x), \\ &\Leftrightarrow x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2) \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité à démontrer. □

Exercice 3. Montrer, de deux façons différentes, que $\forall t \in [0, 1], \exp(t) \leq 2t + 1$

Solution 3 (M1) Variations : Soit $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto \exp(t) - (2t + 1)$.

Alors pour tout $t \in [0, 1], \varphi'(t) = e^t - 2$.

Donc $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \ln(2)$.

Donc φ est croissante sur $[0, \ln(2)]$ et φ est décroissante sur $[\ln(2), 1]$.

Donc pour tout $t \in [0, \ln(2)], \varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$ et pour tout $t \in [\ln(2), 1], \varphi(t) \geq \varphi(1) = e - 3 \geq 0$.

Ainsi, on a bien montré que pour tout $t \in [0, 1], \varphi(t) \geq 0$, c.q.f.d.

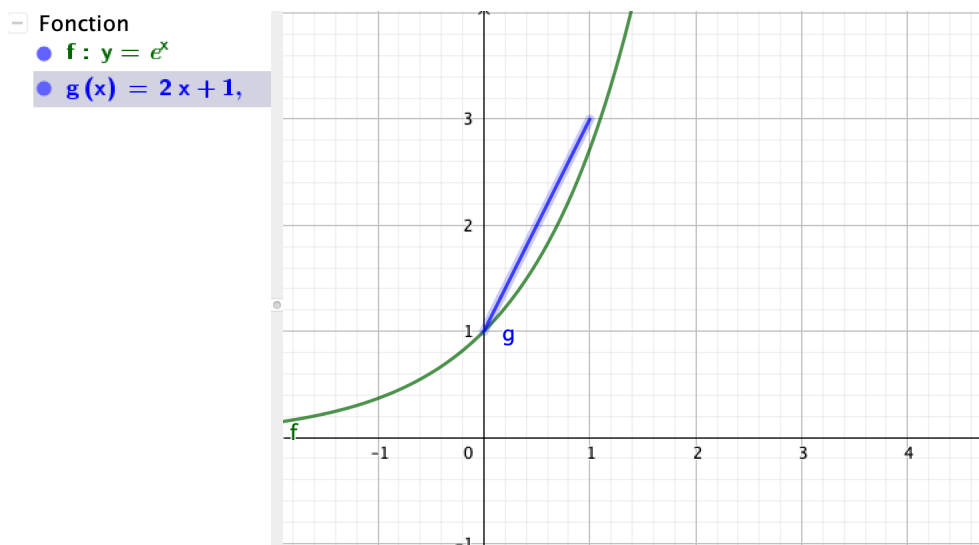
(M2) Convexité :

Notons pour tout $t \in [0, 1], f(t) = 2t + 1$. Ainsi $f(1) = 3$. Or $e < 3$.

Donc le point $B = (1, 3)$ est dans l'épigraph de \exp .

Le point $A = (0, 1)$ est sur le graphe de \exp .

Comme \exp est convexe, le segment $[A, B]$ est dans l'épigraph de \exp , or c'est le graphe de f , d'où l'inégalité demandée.



Exercice 4. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}, xy \leq x \ln(x) + e^{y-1}$.

Solution 4 (M1) La plus simple Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. On étudie les variations de $f: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln(x) + e^{y-1} - xy$.

On calcule $f'(x) = 1 + \ln(x) - y$ ce qui donne un tableau de variation avec f décroissante sur $]0, e^{y-1}]$ et croissante après. Comme f vaut 0 en e^{y-1} on a la conclusion : $\forall x > 0, f(x) \geq 0$.

Comme ceci a été montré pour un $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on a bien la conclusion de l'exercice. \square

(M2) Pour le défi « trouver la convexité là-dessous » Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On considère : $f: \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln(x) + e^{y_0-1}$.

(i) Comme $\forall x > 0, f''(x) = 1/x > 0$, on sait que f est convexe.

(ii) On remarque que pour $x_0 = \exp(y_0 - 1)$:

- $f'(x_0) = 1 + \ln(x_0) = y_0$, et
- $f(x_0) = e^{y_0-1}(y_0 - 1) + e^{y_0-1} = e^{y_0-1}y_0 = x_0y_0$.

donc la tangente à Γ_f admet au point d'abscisse x_0 a pour équation $y = xy_0$.

(iii) Comme f est convexe, Γ_f est au-dessus de sa tangente en ce point x_0 , d'où l'inégalité cherchée :

$$\forall x > 0, x \ln(x) + e^{y_0-1} \geq xy_0$$

comme y_0 est quelconque, on a la conclusion.

Exercice 5. a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.

b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.

Solution 5 a)(M1) La plus simple méthode algébrique... L'inégalité proposée ne change pas si on échange a et b . On peut donc SRdG supposer $a \geq b$.

Avec cette hypothèse la conclusion devient $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a - b}$ (C).

Comme il s'agit d'une inég. entre nombres positifs, elle est équivalente à l'inégalité entre les carrés des deux membres :

$$(C) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq a - b \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \leq a - b \Leftrightarrow 2b - 2\sqrt{ab} \leq 0.$$

Ainsi (C) $\Leftrightarrow b \leq \sqrt{ab}$. Or avec l'hypothèse $a \geq b$, on sait que $ab \geq b^2$ et donc $\sqrt{ab} \geq b$. D'où (C)

(M2) plus difficile En fait, on peut montrer le même résultat en remplaçant $\sqrt{}$ par n'importe quelle fonction concave de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ qui envoie 0 sur 0, mais c'est un exercice un peu plus difficile !

Exercice 1 : montrer que si $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est concave et envoie 0 sur 0, alors f est sous-additive i.e. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 2 : déduire de l'exercice 1 qu'avec les mêmes hypothèses, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, |f(x) - f(y)| \leq f(x - y)$.

b) **(M1) La plus simple, par la convexité de $x \mapsto x^4$**

On sait que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4$ est convexe sur \mathbb{R} entier, car $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 12x^2 \geq 0$.

Donc pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

Ceci donne ici $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4 + b^4}{2}$ ce qui, en chassant les dénominateurs, est l'inégalité demandée.

(M2) méthode algébrique... $(a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)^2$ (1).

Comme on a pu l'utiliser déjà plusieurs fois, on sait que $2ab \leq a^2 + b^2$ (2) car $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$.

Donc avec (2) dans (1), on obtient : $(a+b)^4 \leq (a^2 + a^2 + b^2 + b^2)^2 = 4(a^2 + b^2)^2$.

De même $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$ avec $2a^2b^2 \leq a^4 + b^4$.

D'où la conclusion : $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.