Sol. d'ex. pl. 9

Exercice 2. Montrer que $\forall\, x \in]0,1[$, $x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln(2)$

Solution 2 **(M1)** Par étude de la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) + \ln(2)$.

On veut montrer que $\forall\, x \in]0,1[$, $f(x) \geq 0$.

Or pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \ln(x) + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln(\dfrac{x}{1-x})$.

Ainsi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(\dfrac{x}{1-x}) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1-x$ (car $1-x > 0$).

Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1/2$.

Ainsi f est décroissante sur $]0,1/2]$ et croissante sur $[1/2,1[$ donc f atteint son minimum en $1/2$ et ce minimum vaut $f(1/2) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1}{2}) + \ln(2) = 0$.

Donc pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \geq 0$.

(M2) Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $g(x) = x\ln(x)$. L'inégalité à démontrer s'écrit :

$$g(x) + g(1-x) \geq 2g(1/2)$$

c'est-à-dire encore :

$$\frac{g(x) + g(1-x)}{2} \geq g(1/2)$$

Or comme $1/2$ est la bien le milieu du segment $[x,(1-x)]$ (resp. $[(1-x),x]$) , pour montrer qu'elle est vraie, il suffit de montrer que g est convexe sur $]0,1[$.

Or pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 + \ln(x)$ et $g''(x) = 1/x > 0$, donc g est convexe sur $]0,+\infty[$ et la conclusion.

(M3) Assez originale

Par concavité du ln, pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\ln((1-t)a + tb) \geq (1-t)\ln(a) + t\ln(b).$$

Soit $x \in]0,1[$. En appliquant l'inégalité précédente à $t = x$, $a = x$, $b = 1-x$, on obtient :

$$\ln((1-x)x + x(1-x)) \geq (1-x)\ln(x) + x\ln(1-x) \quad (\dagger)$$

Or

$$\begin{aligned}
(\dagger) \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2x(1-x)) \geq (1-x)\ln(x) + x\ln(1-x)\\
&\Leftrightarrow \quad \ln(2) + \ln(x) + \ln(1-x) \geq (1-x)\ln(x) + x\ln(1-x),\\
&\Leftrightarrow \quad x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geq -\ln(2)
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité à démontrer. □

Exercice 3. Montrer, de deux façons différentes, que $\forall\, t \in [0,1]$, $\exp(t) \leq 2t + 1$

Solution 3 **(M1) Variations :** Soit $\varphi : t \in [0,1] \mapsto \exp(t) - (2t+1)$.

Alors pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = e^t - 2$.

Donc $\varphi'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \ln(2)$.

Donc φ est croissante sur $[0,\ln(2)]$ et φ est décroissante sur $[\ln(2),1]$.

Donc pour tout $t \in [0,\ln(2)]$, $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$ et pour tout $t \in [\ln(2),1]$, $\varphi(t) \geq \varphi(1) = e-3 \geq 0$.

Ainsi, on a bien montré que pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(t) \geq 0$, c.q.f.d.

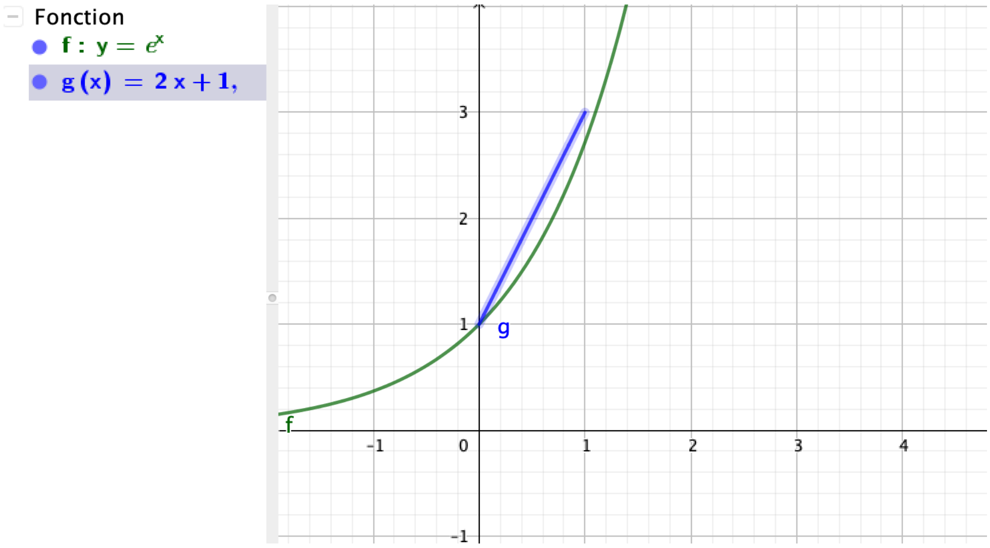
(M2) Convexité :

Notons pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 2t+1$. Ainsi $f(1) = 3$. Or $e < 3$.

Donc le point $B = (1,3)$ est dans l'épigraphe de exp.

Le point $A = (0,1)$ est sur le graphe de exp.

Comme exp est convexe, le segment $[A,B]$ est dans l'épigraphe de exp, or c'est le graphe de f, d'où l'inégalité demandée.



Exercice 4. Montrer que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ xy \leq x\ln(x) + e^{y-1}$.

Solution 4 **(M1) La plus simple** Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. On étudie les variations de $f\ :\ \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\ln(x) + e^{y-1} - xy$.

On calcule $f'(x) = 1 + \ln(x) - y$ ce qui donne un tableau de variation avec f décroissante sur $]0, e^{y-1}]$ et croissante après. Comme f vaut 0 en e^{y-1} on a la conclusion : $\forall\,x > 0,\ f(x) \geq 0$.

Comme ceci a été montré pour un $y \in \mathbb{R}$ quelconque, on a bien la conclusion de l'exercice. $\square$

(M2) Pour le défi « trouver la convexité là-dessous » Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé. On considère : $f\ :\ \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\ln(x) + e^{y_0-1}$.

(i) Comme $\forall\,x > 0,\ f''(x) = 1/x > 0$, on sait que f est convexe.

(ii) On remarque que pour $x_0 = \exp(y_0 - 1)$:

- $f'(x_0) = 1 + \ln(x_0) = y_0$, et
- $f(x_0) = e^{y_0-1}(y_0 - 1) + e^{y_0-1} = e^{y_0-1}y_0 = x_0y_0$.

donc la tangente à Γ_f admet au point d'abscisse x_0 a pour équation $y = xy_0$.

(iii) Comme f est convexe, Γ_f est au-dessus de sa tangente en ce point x_0, d'où l'inégalité cherchée :

$$\forall\,x > 0,\ x\ln(x) + e^{y_0-1} \geq xy_0$$

comme y_0 est quelconque, on a la conclusion.

Exercice 5. a) Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.

b) Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.

Solution 5 a)**(M1) La plus simple méthode algébrique...** L'inégalité proposée ne change pas si on échange a et b. On peut donc SRdG supposer $a \geq b$.

Avec cette hypothèse la conclusion devient $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}\quad(C)$.

Comme il s'agit d'une inég. entre nombres positifs, elle est équivalente à l'inégalité entre les carrés des deux membres :

$(C) \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq a - b \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \leq a - b \Leftrightarrow 2b - 2\sqrt{ab} \leq 0$.

Ainsi $(C) \Leftrightarrow b \leq \sqrt{ab}$. Or avec l'hypothèse $a \geq b$, on sait que $ab \geq b^2$ et donc $\sqrt{ab} \geq b$. D'où (C)

(M2) plus difficile En fait, on peut montrer le même résultat en remplaçant $\sqrt{\ }$ par n'importe quelle fonction concave de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui envoie 0 sur 0, mais c'est un exercice un peu plus difficile !

Exercice 1 : montrer que si $f\ :\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est concave et envoie 0 sur 0, alors f est *sous-additive* i.e. $\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 2 : déduire de l'exercice 1 qu'avec les mêmes hypothèses, $\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ |f(x) - f(y)| \leq f(x-y)$.

b) **(M1) La plus simple, par la convexité de $x \mapsto x^4$**

On sait que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ est convexe sur $\mathbb{R}$ entier, car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$.

Donc pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(\dfrac{a+b}{2}) \leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Ceci donne ici $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 \leq \dfrac{a^4+b^4}{2}$ ce qui, en chassant les dénominateurs, est l'inégalité demandée.

(M2) méthode algébrique...$(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)^2 \quad (1)$.

Comme on a pu l'utiliser déjà plusieurs fois, on sait que $2ab \leq a^2+b^2 \quad (2)$ car $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$.

Donc avec (2) dans (1), on obtient : $(a+b)^4 \leq (a^2+a^2+b^2+b^2)^2 = 4(a^2+b^2)^2$.

De même $(a^2+b^2)^2 = a^4+b^4+2a^2b^2$ avec $2a^2b^2 \leq a^4+b^4$.

D'où la conclusion : $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$.

Exercice 6 (Trois inégalités DS 2 2015/2016)**.** a) Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) = \ln(t) - 2\dfrac{t-1}{t+1}$. Montrer que $\forall t > 1$, $f(t) > 0 \quad (I_1)$.

b) En déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x < y \Rightarrow \dfrac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \dfrac{x+y}{2} \quad (I_2)$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln(1+\frac{1}{k})} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12} \quad (I_3)$.

Indication – On pourra utiliser sans démonstration la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution 6 a) Sur $D_f = [1,+\infty[$, f est dérivable $\forall t \in D_f$, $f(t) = \ln(t) - 2 + \dfrac{4}{t+1}$ donc $f'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{4}{(t+1)^2}$.

Donc $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{t} > \dfrac{4}{(t+1)^2} \Leftrightarrow (t+1)^2 > 4t$ car $t > 0$.

Donc $f'(t) > 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 > 0$ ce qui est vrai pour tout $t > 1$. Donc $f' > 0$ sur $]1,+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Comme $f(1) = 0$ on conclut que $\forall t > 1$, $f(t) > 0$.

b) *L'idée est de faire apparaître une seule variable : le* $\ln(y)-\ln(x)$ *s'écrit naturellement* $\ln(y/x)$ *est-ce que* t *ce ne serait pas* y/x *?*

Comme $y > x$, $\ln(y)-\ln(x) > 0$ donc $(I_2) \Leftrightarrow 2(y-x) < (x+y)(\ln(y)-\ln(x)) \Leftrightarrow 2x(\dfrac{y}{x}-1) < x(\dfrac{y}{x}+1)\ln(\frac{y}{x})$

En posant $t = \frac{y}{x} > 1$, en simplifiant par $x > 0$, on a donc $(I_2) \Leftrightarrow 2(t-1) < (t+1)\ln(t) \Leftrightarrow 2\dfrac{t-1}{t+1} < \ln(t)$ car $t-1 > 0$.

Donc finalement $(I_2) \Leftrightarrow (I_1)$ et comme on a démontré que (I_1) est vraie, on a (I_2) vraie.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On applique (I_2) à $x = k$ et $y = k+1$, on a : $\dfrac{1}{\ln(k+1)-\ln(k)} < \dfrac{2k+1}{2}$.

Donc en multipliant par k on obtient : $\dfrac{k}{\ln(1+\frac{1}{k})} < \dfrac{(2k+1)k}{2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln(1+\frac{1}{k})} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)k}{2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$, d'où l'inégalité (I_3).

Remarque : pour plus simple, on peut avoir une inégalité à peine moins bonne qu'au c) en voyant $\ln(k+1)-\ln(k)$ comme $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et en encadrant cette intégrale $\displaystyle\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{k}$

On obtient alors $k^2 < \dfrac{k}{\ln(k+1)-\ln(k)} < k(k+1)$ donc une majoration par $k(k+1)$ au lieu de $k(k+\dfrac{1}{2})$.