

Solutions d'exercices pl. 8

Exercice 6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1} \leq \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}$

Solution 6 (M1) Suggérée par le titre du paragraphe, avec le T.A.F.

On note $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sqrt[4]{x} = x^{1/4}$. On sait que $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ (on le justifierait avec les théorèmes sur la continuité, resp. la dérivabilité d'une fonction réciproque.)

On sait que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$. On remarque donc que f' est décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on applique le T.A.F. entre n et $n+1$ ce qui donne un $c \in]n, n+1[$, tel que $f(n+1) - f(n) = f'(c)$ (1).

On applique aussi le T.A.F. entre $n+1$ et $n+2$ ce qui donne un $d \in]n+1, n+2[$, tel que $f(n+2) - f(n+1) = f'(d)$ (2).

Par décroissance de f' sur $\mathbb{R}^{++}$, comme $c < d$ on sait que $f'(c) > f'(d)$, ce qui avec (1) et (2) donne :

$$f(n+2) - f(n+1) < f(n+1) - f(n)$$

c'est-à-dire l'inégalité à démontrer, et même mieux, puisqu'on a montré l'inégalité stricte.

(M2) La méthode précédente a mis en valeur la propriété clef de décroissance de f' i.e. la concavité de f

On peut voir l'inégalité de l'énoncé comme une inégalité de concavité. Soit $n \in \mathbb{N}$, avec les notations de la (M1) comme f' est décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$, on sait que f est concave sur $\mathbb{R}^+ : n+1$ étant le milieu du segment $[n, n+2]$, on a :

$$\frac{f(n) + f(n+2)}{2} \leq f(n+1)$$

et c'est exactement l'inégalité à démontrer.

Exercice 7. Déterminer à l'aide du T.A.F. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \right)$.

Solution 7 En notant $f : x \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-1/3} = x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a dit en cours que les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables montrent que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et que pour tout $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1},$$

autrement dit :

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^{4/3}}$$

N.B – Le fait que cette formule soit valable pour les α de la forme $1/n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ vient, comme on l'a expliqué en cours sur l'exemple de $n = 1/2$ et $n = 1/3$, du théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque. On reprendra cela avec les $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconques via la fonction exponentielle.

On pose pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \right) = \frac{f(1-x) - f(1+x)}{x}$.

Par T.A.F. appliqué à f entre $1-x$ et $1+x$ il existe un $c(x)$ compris entre $1-x$ et $1+x$ (sans avoir besoin de préciser si $x > 0$ ou $x < 0$) tel que :

$$f(1-x) - f(1+x) = -2x f'(c(x))$$

Donc $g(x) = -2f'(c(x)) = \frac{2}{3} \frac{1}{c(x)^{4/3}}$.

Or $c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (par thm des gendarmes puisque $c(x)$ est compris entre $1-x$ et $1+x$).

Donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2/3$. □

Exercice 8 (QCM). a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut majorer $|\sin(x) - \sin(y)|$ par : (i) $|x - y|$, (ii) $\frac{1}{2}|x - y|$, (iii) $x|x - y|$, (iv) 1 ?

b) Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. Le taux de variation $\frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a}$ est compris entre : (i) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, (ii) 0 et $\sqrt{a}$, (iii) $\frac{3}{2}\sqrt{a}$ et $\frac{3}{2}\sqrt{b}$, (iv) 0 et $\sqrt{b}$?

Solution 8 a) (i) VRAIE Par I.A.F. car $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) FAUX avec $x = \pi/2$ et $y = \pi$, car alors $|\sin(x) - \sin(y)| = 1$ et $\frac{1}{2}|x - y| = \pi/4 < 1$.

(iii) FAUX avec $x < 0$ et $x - y \neq 0$ dans ce cas $x|x - y| < 0$ ne peut pas et donc $x|x - y|$ ne peut pas majorer le nombre positif $|\sin(x) - \sin(y)|$.

(iv) FAUX avec $x = \pi/2$ et $y = -\pi/2$ car alors $|\sin(x) - \sin(y)| = 2$.

b) (i) FAUX et (iv) FAUX : *Par l'absurde* si l'inégalité $\frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a} \leq \sqrt{b}$ était vraie pour tout les $b > a$ alors par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on aurait aussi :

$$f'(b) \leq \sqrt{b}$$

où on note encore $f(x) = x^{3/2}$ et $f'(b) = \lim_{a \rightarrow b} \frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a}$.

Or $f'(b) = \frac{3}{2}\sqrt{b}$ ce qui donnerait donc :

$$\frac{3}{2}\sqrt{b} \leq \sqrt{b}$$

contradiction.

(ii) FAUX : De même *Par l'absurde* si l'inégalité $\frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a} \leq \sqrt{a}$ était vraie pour tout les $b > a$ alors par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on aurait aussi :

$$f'(a) \leq \sqrt{a}$$

où on note $f(x) = x^{3/2}$ et $f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{b^{3/2} - a^{3/2}}{b - a}$.

Or $f'(a) = \frac{3}{2}\sqrt{a}$ ce qui donnerait donc :

$$\frac{3}{2}\sqrt{a} \leq \sqrt{a}$$

contradiction.

(iii) VRAIE : par T.A.F. en notant $f(x) = x^{3/2}$, on a $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ où $c \in]a, b[$. Or $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Et $f'(a) < f'(c) < f'(b)$.

Exercice 10. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

Montrer que f se prolonge en $\tilde{f}$ fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ entier.

Solution 10 (i) f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par théorème généraux d'opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

(ii) Montrons que la fonction f se prolonge par continuité en 0.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x$ et on sait que $\frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$ donc par produit de limite $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Ainsi en posant $\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ on obtient une fonction *continue* sur $\mathbb{R}$ qui prolonge f en 0.

(iii) Montrons que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en appliquant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ en 0. Comme on sait déjà que $\tilde{f}$ est continue en 0, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, il suffit d'après ce théorème, de montrer que $f'(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow 0$.

Or par théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables, on sait que pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2x \cos(x^2)}{x} - \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 - 1 = 1$$

Donc par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, $\tilde{f}'(0) = 1$ et mieux $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 11. Soit f définie par $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x}$. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Pour l'étude de la dérivabilité en 0, comparer les deux méthodes proposées dans le cours.

Solution 11 a) Sur $]0, +\infty[$: Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 + \sqrt{x} \in \mathbb{R}^{++}$, on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ par théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f'(x) = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{x})}.$$

b) Au point 0 :

Méthode avec le théorème de la limite de la dérivée : (i) Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 + \sqrt{x}$ est dans le domaine de continuité du $\ln$, alors par théorème d'opérations sur les fonctions continues, on sait que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) On vient de voir que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ et avec l'expression trouvée, on observe que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1/2$

Avec (i), (ii) et le théorème de la limite de la dérivée, on conclut que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -1/2$.

Méthode avec la limite des taux de variations : Ici on tombe sur une forme indéterminée qu'on ne sait pas encore traiter.

Exercice 15 (Plus facile car on a déjà fait le 14!). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$. Montrer que f est une fonction linéaire.

Solution 15 En dérivant $2f'(2x) = 2f'(x)$, donc $f'(2x) = f'(x)$ (*). Autrement dit la fonction f' qui par hypothèse sur f est encore continue sur $\mathbb{R}$, vérifie exactement les hypothèses de l'exercice précédent.

Pour que la solution soit autonome, rerédigeons l'argument ;

On réécrit (*) sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(x/2)$.

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tout $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = f'(\frac{x}{2^n})$ (1).

Or pour x fixé, la suite $(x/2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro. Par composition des limites, comme f' est continue en 0, on en déduit que $f'(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0)$ (2).

Or par (1) la suite des $(f'(\frac{x}{2^n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $f'(x)$.

Mais alors (2) donne l'égalité $f'(x) = f'(0)$.

On vient de montrer que la fonction f' est constante sur $\mathbb{R}$.

En notant a cette constante, comme $\mathbb{R}$ est un INTERVALLE, on en déduit qu'il existe une constante b telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$

Pour conclure que f est une fonction linéaire, il suffit de montrer que $b = 0$.

Or l'hypothèse de l'énoncé $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$ donne pour $x = 0$ que $f(0) = 2f(0)$ ce qui donne bien $f(0) = 0$.

On conclut bien qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, autrement que f est une fonction linéaire.