

Comment démontrer des inégalités

Exercice 1 (Le cas exemplaire de l'inégalité arithmético-géométrique (à connaître comme du cours)). Montrer pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$ l'inégalité suivante : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ de trois façons différentes :

- (i) Par calcul algébrique avec une série d'équivalences.
- (ii) En fixant une variable et dérivant par rapport à l'autre.
- (iii) Par concavité du $\ln$.

Remarque : Vérifiez aussi que si par exemple $b \leq a$, on a $b \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq a$. Le nombre $\sqrt{ab}$ s'appelle moyenne géométrique de a et b .

Exercice 2. Montrer que $\forall x \in]0, 1[, x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x) \geq -\ln(2)$

Exercice 3. Montrer, de deux façons différentes, que $\forall t \in [0, 1], \exp(t) \leq 2t + 1$

Exercice 4. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}, xy \leq x \ln(x) + e^{y-1}$.

Exercice 5. a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.

b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$.

Exercice 6 (Trois inégalités DS 2 2015/2016). a) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \ln(t) - 2\frac{t-1}{t+1}$. Montrer que $\forall t > 1, f(t) > 0$ (I_1).

b) En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < y \Rightarrow \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{x+y}{2}$ (I_2).

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{k}{\ln(1 + \frac{1}{k})} < \frac{n(n+1)(4n+5)}{12}$ (I_3).

Indication – On pourra utiliser sans démonstration la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.