Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(i^k)$.

Exercice 2. Déterminer $S = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{i}{i+j}$.

Exercice 3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} 2^i$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) i) Calculer $S_2(n) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (i+j)$.

ii) Ecrire une fonction PYTHON `S2` qui prend un entier n en argument et retourne la valeur de $S_2(n)$.

b) Calculer $S_3(n) = \sum_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3} (i+j+k)$.

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $S_p(n) = \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p} (i_1 + \cdots + i_p)$.

Conjecturer, et démontrer par récurrence, une expression de $S_p(n)$ pour tout $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Exercice 5 (Où les sommes doubles permettent de calculer des sommes simples)**.** En remarquant que $i^2 = \sum_{j=1}^{i} i$, retrouver la formule donnant $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x^3 + 2x + 7$. Déterminer $f([-2,7])$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

a) Déterminer l'ensemble image $J = f(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans J, et donner une formule explicite pour f^{-1}.

Exercice 8. a) Soit $P^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$. Dessinez P^+, en justifiant votre dessin.

b) On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x,y) = (x^2 - 2xy - y^2, y).$$

Déterminer l'ensemble $f(P^+)$ et dessinez-le dans le plan en justifiant votre dessin.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}$.

L'application f est-elle injective, surjective ? A défaut de surjectivité déteminer une CNS sur $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ pour que a/b ait un antécédent par f.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \begin{cases} x + \sqrt{2} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

a) f est-elle injective ?

b) Déterminer $f(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de la continuité de f ?

Exercice 11 (Construction par récurrence d'une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}^{+*}$)**.** Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie de la façon suivante :

$$r_1 = 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ r_{2k} = 1 + r_k, \quad r_{2k+1} = \frac{1}{r_{2k}}.$$

Montrer que l'application $r : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}^{+*}$, $k \mapsto r_k$ est une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}^{+*}$.