

Chap. A3 : applications entre ensembles quelconques
injections, surjections, bijections. Illustrations et cas particulier
des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$

« The mathematical notion of mapping is an abstraction of making a geographical map. It is now considered to be a fundamental notion pervading much of mathematics ». Extr. Encyclopedia Britannica.

I Les applications entre ensembles quelconques

1) notion générale de correspondance

Soient E et F deux ensembles.

a) D'une manière vague, une *correspondance* de E dans F est une façon d'associer à chaque élément x de E un ou plusieurs, ou aucun (!) élément(s) de F .

Exemples : • à chaque $x \in \mathbb{R}$ on associe tous les $y \in \mathbb{R}$ tels que $x = y^2$,

• à chaque entier $x \in \mathbb{Z}$, on associe tous les entiers congrus y à $x \bmod 2$,

c'est-à-dire tels que $y - x$ soit divisible par 2.

Dans chaque cas, on peut tracer le *graphe* de la correspondance.

Terminologie : une correspondance de E dans F s'appelle aussi une *relation* sur l'ensemble E .

b) Construction mathématique : se donner une correspondance c de E dans F équivaut à se donner un sous-ensemble $\Gamma \subset E \times F$ et à définir qu'à un x dans E correspondent, par c , tous les y tels que $(x, y) \in \Gamma$. L'ensemble Γ s'appelle le *graphe* de la correspondance c .

2) Applications : correspondances bien particulières !

a) (i) **définition, notation** : une *application* f de E dans F (ce qu'on notera $f : E \rightarrow F$) est une correspondance de E dans F qui à tout x dans E associe *un élément de F et un seul*, appelé *image* de x par f et noté $f(x)$.

Notation $f : E \rightarrow F, x \mapsto f(x)$. Pour une telle application $f : E \rightarrow F$, l'ensemble E s'appelle *ensemble de départ* et F l'*ensemble d'arrivée*.

(ii) Traduction sur les flèches entre patates :

(iii) Traduction sur les graphes :

(iv) On note encore $\Gamma_f \subset E \times F$ le *graphe* de f . Par déf. du graphe :

$$\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma_f$$

(v) Notation : on notera $\mathcal{A}(E, F)$ ou $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des applications de E dans F .

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ ou bien E est une partie de $\mathbb{R}$, une application $f \in \mathcal{A}(E, \mathbb{R})$ est souvent appelée *fonction* de E dans $\mathbb{R}$, d'où la notation $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Si $E = F$, on notera parfois $\mathcal{A}(E)$ pour $\mathcal{A}(E, E)$.

b) **Réduction de l'ensemble de départ, déf. de la restriction $f|_A$** : exemple pour $x \mapsto x^2$ et sur des patates.

c) Réduction possible de l'ensemble d'arrivée, ensemble image :

(i) Sur les exemples $x \mapsto x^2$, patates : ensemble(s) d'arrivée plus petits possibles.

(ii) Déf. : soit $f : E \rightarrow F$, son ensemble image $f(E)$ est le sous-ensemble de F défini par

$$\forall y \in F, [y \in f(E) \Leftrightarrow \exists x \in E, f(x) = y].$$

Autre écriture $f(E) = \{f(x), x \in E\}$. (Moins efficace en pratique).

L'ensemble $f(E)$ est le plus petit ensemble d'arrivée qu'on puisse prendre pour f .

On notera encore (sans changer de nom cette fois) $f : E \rightarrow f(E)$, alors que ce n'est pas véritablement la même application.

(iii) Déf. Soit $f : E \rightarrow F$ et soit $y \in F$. On dit $x \in E$ est *un antécédent* de y par f ssi $y = f(x)$.

Exemples avec des patates, et en analyse.

Comment caractériser les éléments de $f(E)$ en terme d'antécédents ?

d) Généralisation : image d'un sous-ensemble :

- (i) **Déf.** si $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$, on définit : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. Dessin ?
 (ii) Prop. (cf. pl.) Si A et B sont dans E , alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
 Attention à ce qui se passe pour $f(A \cap B)$

3) Comment on peut démontrer que l'ensemble image de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Pourquoi a-t-on $f(\mathbb{R}) =$? Expliquer les deux inclusions.
 Que diriez-vous pour $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x^2$?

b) Un outil venant de l'analyse :

- (i) **Thm.** (T.V.I. pour les fonctions continues monotones).

(H) $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ est *continue* et *croissante* sur $[a, b]$ (resp. *décroissante* sur $[a, b]$)
 (C) $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (resp. $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$).

N.B. Voir le II pour plus de précision.

- (ii) Variante du T.V.I.

Notation : On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont que des symboles, qui ne sont pas des nombres réels).

Thm. (T.V.I. pour les fonctions continues stmt. monotones, avec limites)

(H) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in \mathcal{F}([a, b[, \mathbb{R})$ continue, strictement croissante, et telle que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
 (C) $f([a, b[) =$

- c) Avec ce théorème, justifier qu'on a bien, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $f(\mathbb{R}) =$

4) Deux méthodes possibles pour déterminer l'ensemble image d'une application**a) Les deux méthodes présentées sur un exemple :**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x + 1$. Déterminer l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.

- (i) Méthode d'analyse : dans le cas favorable d'une $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec tableau de variations, limites : sur chaque intervalle de monotonie, on applique le T.V.I. pour les fonctions continues monotones.
 (ii) Méthode algébrique : « Soit $y \in F$, on cherche la CNS sur y pour qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$: on cherche si on peut « résoudre » une équation (sans la résoudre).

b) Cas des fonction à deux variables, où on n'échappe pas à la méthode algébrique :

pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 - 3x_2, 3x_1 - 9x_2)$, puis $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 - 6x_2, 3x_1 - 9x_2)$, déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et $g(\mathbb{R}^2)$.

5) Applications injectives, surjectives, bijectives

a) (i) Déf. $f : E \rightarrow F$ (**toujours mentionner les ensembles !**) est surjective ssi $f(E) = F$, i.e. $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$ i.e. tout élément $y \in F$ a *au moins* un antécédent par f .

(ii) Exples (analyse, patates).

(iii) Remarque : Une application f est toujours surjective de E dans

b) Déf. $f : E \rightarrow F$ est injective ssi $\forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
 Caract. la plus utile : $\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (contraposée).

Caract. (dém.) f est injective ssi tout élément $y \in F$ a *au plus* un antécédent par f dans E .

c) Déf. $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi elle est injective et surjective.
Autrement dit $f : E \rightarrow F$ est bijective ssi $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.

Exemples.

6) Application réciproque d'une bijection

a) Définition : pour $f : E \rightarrow F$ bijective, on définit f^{-1} comme l'application de F dans E qui à tout élément y de F associe l'unique antécédent de y par f .

b) Exemple sur des patates : f^{-1} se lit en remontant les flèches.

c) Formalisation du a) : $\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

d) Exemple pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(i) Exemple de $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$. D'une manière générale, on a :

(ii) Prop. : $\Gamma_{f^{-1}} = s_{\Delta}(\Gamma_f)$, où s_{Δ} est la symétrie orthogonale p.r. à la première bissectrice Δ .

(iii) Lemme *dém.* : la réflexion p. r. à la première bissectrice s'écrit : $s_{\Delta} : (x, y) \mapsto (y, x)$.

(iv) Application du lemme à la *dém. par équivalence* de l'égalité : $\Gamma_{f^{-1}} = s_{\Delta}(\Gamma_f)$.

e) Détermination pratique de f^{-1} :

vu le c), pour trouver f^{-1} « inverser » l'équation $y = f(x)$ pour exprimer x en fonction de y .

Exemple : soit $f : A = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x+1}{3x+7}$.

Déterminer $f(A)$, montrer que $f : A \rightarrow f(A)$ est bijective, expliciter f^{-1} .

7) Composition des applications

a) Déf. si $f \in \mathcal{A}(E, F)$ et $g \in \mathcal{A}(F, G)$, on définit $g \circ f \in \mathcal{A}(E, G)$ par :
 $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

La « loi » $\circ$ est une application de $\mathcal{A}(E, F) \times \mathcal{A}(F, G)$ dans $\mathcal{A}(E, G)$.

b) Exemples : patates, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c) Propriétés de $\circ$:

(i) associativité : *dém. de* $(f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ h$ pour toutes les appl. où ceci fait sens.

(ii) l'application identité est *neutre* pour $\circ$: $\forall f \in \mathcal{A}(E, F), f \circ \text{id}_E = f$ et $\text{id}_F \circ f = f$.

(iii) Contre-exemple pour la commutativité :

- avec deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

- plus généralement, dès que E a au moins deux éléments : $\exists (f, g) \in \mathcal{A}(E)^2, f \circ g \neq g \circ f$.

d) Caract. de la bijectivité et de f^{-1} :

(i) $f \in \mathcal{A}(E, F)$ est bijective ssi $\exists g \in \mathcal{A}(F, E), g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

Attention : deux conditions !

(ii) Dans ce cas, cette appl. g est nécessairement unique et coïncide avec f^{-1} .

(iii) Preuve du (i) sens $\Rightarrow$: on montre que $g = f^{-1}$ convient.

(iv) Preuve du (i) sens $\Leftarrow$: avec ex. planche $g \circ f$ injective entraîne f injective, etc...

(v) Preuve de l'unicité du (ii) : *notre premier calcul avec $\circ$!*

e) Exemple d'applications inversibles seulement « d'un côté », cf. exercices.

f) Autre exemple de calculs avec la loi $\circ$: exercice : f bijective et $f \circ f = f$ implique $f = \text{id}$.

g) La composée de deux inj., (resp. de deux surj.) est une injection (resp. une surj.) *dém. pl.*

II Cas des fonctions continues d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: quelques théorèmes clefs

0) Définitions :

a) Intervalle de $\mathbb{R}$: (i) Différentes formes d'intervalles. (ii) Déf. synthétique : I est un intervalle ssi pour tout $(a, b) \in I^2, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I$.

b) Fonction continue (en admettant provisoirement le concept de limite...)

(i) Déf. : f est continue en un point x_0 ssi la limite de f en x_0 existe et vaut $f(x_0)$.

(ii) Déf. : f est continue sur un ensemble I ssi f est continue en tout point de I .

(iii) En pratique : on admet ici la continuité des fonctions usuelles de bases et les théorèmes d'opérations sur les fonctions continues (sommes, produits, quotient dont le dénom. ne s'annule pas, compositions).

1) Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences

a) Le T.V.I avec seulement la continuité :

(i) **T.V.I. Version 1** : admise cf. chap. F

Hyp. si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$. Concl. $\exists c \in]a, b[, f(c) = 0$.

(ii) **T.V.I. Version 2** :

si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ alors tout $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) est "atteint" par f . (savoir dém. avec (i))

Reformulation de la concl. de la version 2 : $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

(iii) **T.V.I. Version 3** (dém.)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

b) Conséquences avec hyp. de monotonie :

(i) **T.V.I. pour les fonctions continues monotones** (cité plus haut) :

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, croissante alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (dém.)

(ii) **Conséquence : théorème dit de la bijection**

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, strict. croissante alors $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ est bij. (dém.)

(iii) **Variante : théorème de la bijection pour les intervalles ouverts**

Extension du thme du (ii) (admis) :

si $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue strictement croissante, et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} l_2$ alors f est bijective de $]a, b[$ sur $]l_1, l_2[$.

En pratique : retenir les trois hypothèses à citer : **continuité, st. monotonie, limites aux bornes**

2) Lien injectivité/monotonie dans le cas des fonctions continues sur un intervalle

a) On a vu des exemples des fonctions injectives non monotones à bien connaître, avec une fonction discontinue sur $\mathbb{R}$, ou même avec des fonctions continues, qui ne sont pas définies sur un intervalle.

b) Prop. (dém. en admettant la reformulation avec trois points de la non-monotonie)
si I est un intervalle et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, injective alors f est strictement monotone.

3) Propriété des fonctions continues bijectives

(a) Théorème (admis) : si I est un intervalle et $f : I \rightarrow J$ est une fonction continue bijective, alors f^{-1} est continue sur J .

b) **Contre-exemple à connaître** si I n'est pas un intervalle.

Retenir l'hyp. cruciale : l'ensemble de départ I est un INTERVALLE.

4) **Théorème pour les fonctions continues sur un segment : théorème des bornes**a) **Déf. d'un segment** : intervalle fermé et borné.

b) (i) Thme (admis) : *une fonction continue sur un segment est bornée. Mieux, elle admet un maximum et un minimum.*

(ii) Pour comprendre ce théorème :

- **Savoir parfaitement** : les déf. de f est majorée, de f admet un maximum, de M est un majorant de f , de M est le maximum de f .

Si $M = \max_{[a,b]} f$, un point $x_M \in [a,b]$ tel que $M = f(x_M)$ s'appelle un *arg-max* de f .

- Savoir donner des exemples de fonctions continues non bornée sur un ouvert borné $]a,b[$, de fonctions continues bornées mais qui n'ont pas de max. ou de min.

c) Le théorème des bornes permet de mieux comprendre *l'ensemble image* d'un tel segment :

Prop. (dém.) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment