

Compléments de solutions, ex. pl. 5

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$.

L'application f est-elle injective, surjective? A défaut de surjectivité déterminer une CNS sur $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ pour que a/b ait un antécédent par f .

Solution 9 Détaillée en classe pour l'injectivité et la surjectivité. On complète juste avec la réponse à la dernière question pour ceux qui ont fait de l'arithmétique en terminale.

Propriété : l'ensemble image de f est exactement l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $x = a/b$ avec $a \wedge b = 1$ et $a \equiv 1 [b]$.

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{Q}$ quelconque, qu'on écrit $x = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ et a et b premiers entre eux.

Alors x est dans l'image de f ssi il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $a/b = p + 1/q$ ce qui équivaut à

$$\frac{a}{b} = \frac{qp + 1}{q} \quad (*)$$

Mais comme $(qp + 1)$ et q sont toujours premiers entre eux (un Bézout évident), $(*)$ est l'égalité de deux écritures irréductibles de la même fraction, ce qui équivaut à $b = q$ et $a = qp + 1$

Ceci donne la conclusion.

Exercice 11 (Construction par récurrence d'une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}^{+*}$). Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie de la façon suivante :

$$r_1 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, r_{2k} = 1 + r_k, \quad r_{2k+1} = \frac{1}{r_{2k}}.$$

Montrer que l'application $r : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}^{+*}, k \mapsto r_k$ est une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}^{+*}$.

Solution 11 (i) On commence par montrer par récurrence (laissée à votre rédaction) les quatre propriétés faciles suivantes, pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$r_n > 0, \quad (1)$$

$$r_{2n} > 1 \quad (2)$$

$$r_{2n+1} < 1 \quad (3)$$

$$r_{2^k \cdot n} = k + r_n \quad (4)$$

(ii) Montrons que r est injective :

• il est d'abord évident par (2), (3) que $\forall n > 1, r_n \neq r_1$.

• ensuite si *par l'absurde* r n'est pas *injective*, soit $n > 1$ le plus petit entier tel qu'il existe un $m > n$ tel que $r_n = r_m$.

Avec les propriétés (2) et (3) du (i), on est sûr que n et m ont la même parité (ils sont tous les deux pairs si $r_n = r_m > 1$ et impairs sinon).

• 1er cas : n et m sont tous les deux *pairs*. On les note $n = 2k$ et $m = 2l$. Alors par la définition de r , on en déduit que $r_k = r_n - 1 = r_m - 1 = r_l$.

Donc k est un entier strictement plus petit que n qui vérifie la même propriété que n : on a $l > k$ tel que $r_k = r_l$ *contradiction avec la définition de n*.

• 2ème cas : n et m sont tous les deux *impairs*. On les note $n = 2k + 1$ et $m = 2l + 1$. Alors par définition de r , on a aussi $r_{2k} = 1/r_{2k+1} = 1/r_{2l+1} = r_{2l}$. On est donc ramené au 1er cas, avec la même *contradiction*.

Ainsi r est *injective*.

N.B. Le fait de considérer le plus petit n permet de contourner l'argument de *descente infinie* dont on a parlé en classe au début.

(iii) Montrons que r est surjective :

Pour chaque entier $N \in \mathbb{N}^*$ on note $P(N)$ la propriété : toutes les fractions de la forme p/q avec $1 \leq q \leq N$ et $p \in \mathbb{N}^*$ sont dans l'ensemble image de r .

Montrons par récurrence que $P(N)$ est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : avec la propriété (4) du (i) on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $r_{2^k} = k + 1$ pour tout k donc tous les entiers, autrement dit les fractions $p/1$ sont dans l'ensemble image de r .

- Hérédité : on suppose $P(N)$ vraie pour un $N \in \mathbb{N}^*$.

Or, par déf. de r , si $p/q \in r(\mathbb{N}^*)$, on sait aussi que $q/p \in r(\mathbb{N}^*)$.

Ainsi on sait que :

toutes les fractions q/p pour $p \in \mathbb{N}^*$, et $q \leq N$ sont dans l'image de r (†)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $p/(N+1)$ est dans l'image de r .

En faisant la division euclidienne de p par $N+1$, on écrit $p = q.(N+1) + p_1$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $p_1 \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Et $\frac{p}{N+1} = q + \frac{p_1}{N+1}$.

Comme, avec (†) on a un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_k = \frac{p_1}{N+1}$ la propriété (4) dit que $r_{2^p.k} = \frac{p}{N+1}$.

La réc. est établie. □