

Ex: 12

Soit $f(x) = x^2 \ln(1+x)$

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(1+x)$

D'après la formule de Leibniz:

$$f^{(n)} = (u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$\text{Or } u^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{2!}{(2-n)!} x^{2-n} & \text{si } n \leq 2 \\ 0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{et } v^{(n)}(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } n=0 \\ (-1)^{n+1} (n-1)! (x+1)^{-n} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Donc :

• pour $n=0$:

$$f^{(0)}(x) = f^{(0)}(x) = f(x) = x^2 \ln(1+x)$$

• pour $n=1$:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= (u.v)^{(1)}(x) = u^{(1)}(x) \cdot v^{(0)}(x) + u^{(0)}(x) \cdot v^{(1)}(x) \\ &= 2x \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

• pour $n=2$:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} u^{(k)}(x) \cdot v^{(2-k)}(x) \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2} x^2 + 2x \frac{2x}{1+x} + 2 \ln(1+x) \\ &= \frac{x(3x+4)}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x) \end{aligned}$$