

Solution de deux exercices pl. 5

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) i) Calculer $S_2(n) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (i+j)$.

ii) Ecrire une fonction PYTHON S2 qui prend un entier n en argument et retourne la valeur de $S_2(n)$.

b) Calculer $S_3(n) = \sum_{(i,j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3} (i+j+k)$.

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $S_p(n) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} (i_1 + \dots + i_p)$.

Conjecturer, et démontrer par récurrence, une expression de $S_p(n)$ pour tout $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Solution 4 a) (i) (M1) Fait en TD de cours avec la somme ligne par ligne comme suit :

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right). \text{ Pour chaque } i, \text{ on note : } A_i = \sum_{j=1}^n (i+j) = \sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = in + \sum_{j=1}^n j = in + \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Alors } S_2 = \sum_{i=1}^n A_i = n \sum_{i=1}^n i + \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

Donc $\boxed{S_2 = n^2(n+1)}$.

(M2) En divisant la somme en deux

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (i+j) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} i + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} j \quad (*) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n i \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n j \right), \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2}, \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = n^2(n+1). \end{aligned}$$

N.B. L'intérêt de cette méthode est que dans (*) les deux sommes $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} i$ et $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} j$ ont en fait clairement la même valeur, le calcul est donc plus *symétrique*. Ce calcul se généralise à S_3 et S_p des questions suivantes.

(ii)

```
def S2(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            S=S+i+j
    return S
```

On suit exactement la méthode du (i) : pour chaque valeur de i (donnée par la boucle extérieure) on rajoute la somme $A_i = \sum_{j=1}^n (i+j)$ avec l'exécution complète de la boucle intérieure.

b) En adaptant la technique du a) :

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (i+j+k), \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (i+j) + \sum_{k=1}^n k \right), \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(n(i+j) + \frac{n(n+1)}{2} \right), \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n(i+j) \right) + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) + n^2 \frac{n(n+1)}{2}, \\
&= nS_2 + \frac{n^3(n+1)}{2}, \\
&= n^3(n+1) + \frac{n^3(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

On conclut donc que $\boxed{S_3 = \frac{3}{2} \cdot n^3(n+1)}.$

c) Conjecture : on note $P(p) : \forall n \in \mathbb{N}^*, S_p(n) = \frac{p}{2} \cdot n^p(n+1).$

Montrons par réc. que $\forall p \in \mathbb{N}^*, P(p).$

• Initialisation : on a vu en cours que $P(1)$ est vraie. (On a aussi vu que $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies au a) et b)).

• Hérédité : supposons que $P(p)$ est vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $P(p+1)$ est vraie. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_{p+1}(n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_p, i_{p+1}) \in \llbracket 1, n \rrbracket^{p+1}} (i_1 + \dots + i_p + i_{p+1}), \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} \left(\sum_{i_{p+1}=1}^n (i_1 + \dots + i_p) + \sum_{i_{p+1}=1}^n i_{p+1} \right), \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} \left(n(i_1 + \dots + i_p) + \frac{n(n+1)}{2} \right), \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} n(i_1 + \dots + i_p) + \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p} \frac{n(n+1)}{2}, \\
&= nS_p(n) + n^p \frac{n(n+1)}{2}, \\
&= n \frac{p}{2} \cdot n^p(n+1) + \frac{n^{p+1}(n+1)}{2} \quad \text{par } P(p), \\
&= \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2} \right) n^{p+1}(n+1)
\end{aligned}$$

ce qui montre bien $S_{p+1}(n) = \frac{p+1}{2} n^{p+1}(n+1)$ et donc $P(p+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est initialisée pour $n=1$ et héréditaire, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)}.$ □

Remarque : Avec la (M2) du a), on peut éviter la récurrence.

Exercice 5 (Où les sommes doubles permettent de calculer des sommes simples). En remarquant

que $i^2 = \sum_{j=1}^i i$, retrouver la formule donnant $\sum_{i=1}^n i^2$.

Solution 5 Soit $S = \sum_{i=1}^n i^2$. Alors $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i i = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} i$.

$$\text{Donc } S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n i = \sum_{j=1}^n \frac{(j+n)(n-j+1)}{2}.$$

$$\text{Donc } S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n n(n+1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j.$$

$$\text{On obtient ainsi } \frac{3}{2}S = \frac{n(n^2+n)}{2} + \frac{n(n+1)}{4}, \text{ et la formule connue.}$$