Chap. A_2 : entiers, récurrences, formules sommatoires

Toute l'arithmétique est la conséquence de l'acte de compter.
J. Stillwell, les mathématiques et leur histoire.

I L'ensemble $\mathbb{N}$ et le raisonnement par récurrence :

1) Un peu de théorie sur $\mathbb{N}$:

On présente ici les propriétés fondamentales de l'ensemble des entiers naturels. Quand on regarde les entiers « dans leur ensemble » (i.e. plutôt qu'isolément), fondamentale est la notion de successeur *: un enfant sait vraiment compter quand il sait compter « jusqu'à l'infini » ce qui veut dire plutôt qu'il sait donner le successeur de n'importe quel nombre.*

Les mathématiciens aiment comprendre les relations entre des propriétés, déduire. *Il est remarquable que* toutes *les propriétés des nombres entiers se déduisent de celles de l'application « successeur », qui à un entier n associe celui qu'on va appeler $n+1$. Cela a conduit à donner la* définition *de $\mathbb{N}$ donnée au a), par une liste de propriétés ou* axiomes. *Cette définition n'est pas à savoir par coeur. Elle entraîne les propriétés données du b) au d), qui,* elles, sont à bien connaître, *même si leur démonstration à partir des axiomes a) n'est pas exigible.*

a) Axiomes de Peano pour $\mathbb{N}$ (H.P, non exigible)

Il existe un ensemble *essentiellement unique* noté $\mathbb{N}$, muni d'une application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qu'on appellera application *successeur* avec les propriétés :
(i) s est *injective*, ce qui signifie que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{N}^2$, $x \neq y \Rightarrow s(x) \neq s(y)$.
(ii) il existe dans $\mathbb{N}$ un élément noté 0 qui n'est le successeur d'aucun élément de $\mathbb{N}$.
(iii) pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, si A contient 0 et est stable par s, alors $A = \mathbb{N}$.

Notation : On note $1 = s(0)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s(n) = n+1$.

Remarque 1 : Suivant qu'on considère par exemple, *les entiers écrits en base dix*, à l'aide des chiffres $0, 1, 2, \dots, 9$ ou *les entiers écrits en base deux*, à l'aide seulement des chiffres $0, 1$, on obtient des *ensembles différents* puisque formés avec des objets différents. Cependant ce qui signifie l'expression *essentiellement unique* dans l'encadré ci-dessus, est qu'il existe une (unique) bijection de $\mathbb{N}_{\text{base deux}}$ dans $\mathbb{N}_{\text{base dix}}$ compatible avec l'application successeur

Remarque 2 : Par définition, un nombre entier naturel est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$. On ne définit pas ici, la notion de nombre entier *isolément.*

b) Conséquence à connaître : principe de récurrence :

Thm. (H) On considère un *prédicat* $P(n)$ dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
- Initialisation : $P(0)$ est vraie,
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vraie.

(C) Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

c) Notion de suite *définie par récurrence :*

(i) **Déf.** Une suite u d'éléments d'un ensemble A (p.ex. $A = \mathbb{R}$) est une application $u : \mathbb{N} \to A$.

(ii) *Vous avez l'habitude, au lycée, de* définir *des suites par récurrence, en disant p.ex. $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$.*

(iii) Le fait que les données du (ii) définissent bien *une unique application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une conséquence de l'axiome de récurrence du a) (iii).

L'idée est qu'on détermine u par ses restriction successives $u_{|[\![0,n]\!]}$ pour tous les $n \in \mathbb{N}$.

d) Retour sur les prop. fondamentales de $\mathbb{N}$:

(i) Déf. de loi + (par récurrence !)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $\mathrm{add}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $m \mapsto \mathrm{add}_n(m)$ par récurrence comme suit :
- $\mathrm{add}_n(0) = n$,
- $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{add}_n(m+1) = \mathrm{add}_n(m) + 1$.

Notation : $\mathrm{add}_n(m) = m + n$.

(ii) Déf. de l'ordre. $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leq n \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N},\ n = m + k$.
Deux propriétés très importantes *à retenir, même si elles sont très intuitives !*

(P1) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
(P2) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée admet un plus grand élément.

La dém. en est admise, mais bien sûr, elles se prouvent par récurrence.

(iii) Déf. loi $\times$: Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $\mathrm{mult}_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ m \mapsto \mathrm{mult}_n(m)$ par récurrence comme suit :

- $\mathrm{mult}_n(0) = 0$,
- $\forall\, m \in \mathbb{N},\ \mathrm{mult}_n(m+1) = \mathrm{mult}_n(m) + n$.

Notation : $\mathrm{mult}_n(m) = m \times n = m.n$.

Les déf. du (i) et (iii) ne sont pas exigibles à ce stade, elles serviront cependant en info.
Les prop. de l'ordre données au (ii) doivent être sues.

(iv) On admettra dans la suite toutes les prop. bien connues de $+$ et $\times$ dans $\mathbb{N}$: elles se montreraient par récurrence !
Penser que s'il est facile de « voir sur un dessin » que $2 \times 3 = 3 \times 2$, c'est moins immédiat avec des nombres à 4 chiffres par exemple, merci la récurrence !

e) Une nouvelle fonction importante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: la factorielle
Déf. (i) : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (ii) Plus formellement : par récurrence.
(iii) Connaître $0\,!, 1\,!,\ 2\,!, 3\,!, 4\,!, 5\,!$.

(iv) En anticipant sur le dénombrement (*pas de dém. formelle*) : $n!$ est le nombre de *permutations* de n éléments distincts i.e. de *façons de les ordonner.* Exemple pour $n = 3$.

2) Pratique du raisonnement par récurrence :
a) **Consigne de rédaction** :

On doit *énoncer clairement le prédicat* $P(n)$ que l'on veut démontrer. Si on veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, P(n)$ est vraie, on montre que :
• Initialisation : $P(n_0)$ est vraie,
• Hypothèse de récurrence (H.R) : soit $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ tel que $P(n)$ est vraie.
Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On conclut à la fin : la récurrence est établie.

Remarque : Ce raisonnement « récurrence à partir d'un certain rang » est valide car c'est l'application du 1) b) à la propriété

b) Exercice : comparer 2^n et $n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Pratique de la récurrence « forte » :
(i) Dans l'H.R., au lieu de supposer qu'on a $P(n)$ vraie pour un certain n, on suppose qu'on a, pour tous les $k \leq n$, $P(k)$ qui est vraie (avec $k \geq n_0$ si on initialise à n_0)

(ii) Exple : montrer que tout entier différent de 1 admet un diviseur premier.

(iii)**N.B.** – La validité de la réc. forte se déduit du principe de réc. usuel appliqué à la propriété

(iv) *Remarque :* Alternative possible au (ii) à la preuve par réc. forte : utiliser le fait qu'une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

d) Erreurs usuelles : oubli de l'initialisation, formulation de l'H.R. avec un $\forall\, n$ ou erreur du type exercice pl.

e) Exemples de suites définies par réc. :
(i) Suites arithmétiques : déf. par réc. et écriture explicite $u_n = u_0 + na$.
(ii) Suites géométriques : déf. par réc. et écriture explicite $u_n = a^n u_0$.

f) Cas des récurrences doubles sur l'exemple de la suite de Fibonacci :
On note $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. La suite (F_n) est appelée *suite de Fibonacci.*

Une formule « tombée du ciel » (pour l'instant) : montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3) Pratique de la récurrence sur l'exemple de la formule du binôme de Pascal-Newton

a) Développement de $(a+b)^n$ pour n petit : arbre de développement.

Lien avec les expériences de Bernoulli vues en première.

Le point de vue choisi en première : on y a *défini* $\binom{n}{k}$ comme le nombre de chemins de l'arbre donnant k succès pour n répétitions.

Il a été démontré en raisonnant sur les chemins les relations :

- $\forall\, n \geq 2,\ \forall\, p \in [\![1, n-1]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$
- $\forall\, n \geq 1,\ \forall\, k \in [\![0, n\ ]\!],\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

b) **Changement de point de vue ici :**

Déf. plus mathématique, plus numérique, des binomiaux : par récurrence (double) en partant *de la relation du a)*

Définition - On définit le coeff. binomial $\binom{n}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0, n]\!]$ par

— Initialisation : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,

— Relation de récurrence : $\forall\, n \geq 2,\ \forall\, p \in [\![1, n-1]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

c) Théorème (les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ sont bien les coefficients du binôme $(a+b)^n$).

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Preuve par récurrence de la formule du binôme, imparfaite car il reste des petits points.... cf. § II pour mieux !

4) Ecriture explicite pour les coeff. binomiaux avec des factorielles :

a) Prop. $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.

b) Preuve par récurrence (frustrante car c'est une vérification, mais à bien maîtriser au niveau de la rédaction) : *formulation correcte de $P(n)$ avec le $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, réduction au même dénominateur....*

c) Comment *trouve-t-on* la formule : en faisant du dénombrement cf. 2ème semestre.

Lorsqu'on veut montrer quelque chose sur les binomiaux : on peut donc penser :
- A la formule du triangle de Pascal (formule de récurrence),
- A les voir comme coefficients d'un binôme $(a+b)^n$ ou $(1+x)^n$.
- A la formule explicite $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$.
- Nous reviendrons plus tard sur l'aspect dénombrement : « p parmi n ».

Appendice au I : pour ceux qui se poseraient des questions... non exigible

A propos des propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$

Dans le cours, on a défini $\mathbb{N}$ à partir des axiomes de Peano. Il y a d'autres façons de définir $\mathbb{N}$, notamment à partir des deux propriétés de l'ordre dans $\mathbb{N}$ qu'on a citées. On ne donnera pas ici les axiomes dans ce cas car il faudrait déjà préciser ce qu'est une *relation d'ordre* en général... nous en reparlerons.

Ici, nous voulons montrer comment d'un côté on peut démontrer les propriétés de l'ordre à partir de l'axiome de récurrence, et comment, dans l'autre sens, on pourrait s'en servir pour déduire l'axiome de récurrence.

On note encore $\mathbf{P_1}$ la propriété : « toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ».

- **Comment on montre $\mathbf{P_1}$ à partir de l'axiome de récurrence :**

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ qui n'a pas de plus petit élément. Montrons par récurrence (forte) que A est l'ensemble vide. Précisément, on considère le prédicat $P(n) \ : n \notin A$.

• Comme 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$, $0 \notin A$, sinon 0 serait le plus petit élément de A. Donc $P(0)$ est vrai.

• H.R. forte : supposons que pour tout $k \leq n$, $k \notin A$. Alors si $n+1$ était dans A, $n+1$ serait par déf. le plus petit élément de A, *contradiction* donc $n+1 \notin A$ et $P(n+1)$ est vrai.

La réc. est établie. □

• **Comment on montre que $\mathbf{P_1}$ entraîne l'axiome de récurrence :**

On suppose donc qu'on sait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Soit $A \subset \mathbb{N}$, tel que $A \ni 0$ et $\forall\, n \in A$, $n+1$. Montrons que $A = \mathbb{N}$.

Par l'absurde si $A \neq \mathbb{N}$, alors $A^c \neq \varnothing$ et donc A^c admet un plus petit élément $m \in \mathbb{N}$. Comme $0 \in A$, $m \neq 0$ et donc $m-1 \in \mathbb{N}$ et comme m est le plus petit élément de A^c, $m-1$ n'est pas dans A^c donc $m-1 \in A$.

Mais alors $(m-1)+1 \in A$ par hypothèse sur A donc $m \in A$, *contradiction.*

> Ce qui précède n'intéressera que ceux qui ont l'âme « théoricienne ».
> En revanche, il faut avoir compris l'exemple du cours où l'on peut utiliser aussi bien une récurrence ou l'existence d'un minimum pour montrer une propriété (l'existence d'un diviseur premier)

Exercice amusant... qu'on peut résoudre en cherchant un minimum...

Soit n un entier naturel non nul.

On se donne dans le plan $2n$ points, notés $F_1, \ldots, F_n$ et $P_1, \ldots, P_n$, *trois par trois non alignés.*

Chaque point $F_1, \ldots, F_n$ représente une ferme et chaque point $P_1, \ldots, P_n$ un puit.

On veut fabriquer des chemins en ligne droite reliant chaque ferme à un puit différent.

Est-il possible de le faire de sorte qu'aucun des chemins ne croise un autre (les fermiers ont tous mauvais caractère) ?

II Formules sommatoires : symbole $\sum$

1) Notation $\sum$

a) (i) Déf intuitive : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + \cdots + a_n$.

(ii) Déf. plus rigoureuse de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i$?

b) Sens de la variable i : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{i\in[\![0,n]\!]} a_i$.

Notion de variable muette.

c) En info. : comment calculer une somme à l'aide d'une boucle `for` :

Pour calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i$, on peut procéder comme suit, ce qui suit les dièses `#` est un commentaire, qui n'est pas lu par la machine.

```
S=0 # on crée une variable S à laquelle on affecte (symbole =) la valeur 0
for i in range(101): # i va prendre successivement les valeurs 0,1,..., 100
    S=S+i # à chaque tour de boucle on ajoute i à la valeur précédente de S
print(S)
```

d) Trois règles de calculs (distrib. , regroupement, changement d'indice)

e) Application : $\boxed{\textit{rédaction de la preuve de la formule du binôme avec des } \sum}$

f) Reformulation « polynomiale » de la formule du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Application : valeur de la somme de tous les binomiaux d'une même ligne du triangle de Pascal :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

2) Exemples de formules sommatoires : les $\sum$ comme alternative aux récurrences

a) L'astuce du petit Gauss pour $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$: idée regroupmt de termes, rédac. $\sum$.
b) Généralisation aux suite arithmétiques : *à savoir absolument :*
Somme des termes : *(Premier terme + dernier terme)*× *nombre de termes* /2

Savoir faire : Ecriture de la preuve avec les $\sum$.
c) Somme des termes d'une suite géométrique. : *à savoir absolument :*
(Premier terme − successeur du dernier)/ (1− la raison)
Preuve : telescopage à voir sans $\sum$ et avec $\sum$!

3) Principe général des sommes télescopiques :

a) L'essentiel :

Formule : $\boxed{\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.}$

b) Exemple d'application :
(i) Exo. « frustant » : *vérifier* que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(ii) Méthode pour « découvrir la formule » .
En notant $u_k = k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on cherche (v_k) telle que $v_{k+1} - v_k = u_k$, ou à peu près !
Ici, on essaie $v_k = k^3$ (analogie avec la dérivation...)
(iii) Fin de l'exercice : factorisation du résultat.
(iv) Obtention de même de la formule pour $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

c) Application des sommes télescopique à une identité remarquable importante :
(i) Prop.

$$\boxed{\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-k}b^{k-1} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).}$$

Preuve facile en allant de ...
(ii) Interprétation de cette formule pour $a \neq 0$, en passant en variable $x = b/a$.

4) Variante multiplicative des $\sum$: les $\prod$

a) Déf de $\prod_{i=1}^{n} a_i$: par récurrence.

b) Exemple de calcul : $\prod_{i=1}^{n} (\lambda a_i) =$

$\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) =$

c) Exemple de la factorielle : $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

III T.D. Cours : manipulations de $\sum$ et de sommes doubles

0) Présentation des sommes doubles :

On considère une famille $(a_{i,j})$ de nombres réels indexée par des indices $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On peut visualiser cette famille par un tableau, l'indice i représentant par convention l'indice ligne et l'indice j l'indice colonne.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,j}$	$\cdots$	$a_{1,p}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,j}$	$\cdots$	$a_{2,p}$
$\vdots$ $a_{i,1}$ $\vdots$	$a_{i,2}$ $\cdots$	$\cdots$ $\cdots$	$a_{i,j}$ $\vdots$	$\vdots$ $\cdots$	$a_{i,p}$
$a_{n,1}$		$\cdots$	$a_{n,j}$		$a_{n,p}$

Grâce à la commutativité (et l'associativité !) de l'addition dans $\mathbb{R}$, on peut faire la somme de tous éléments de la famille dans n'importe quel ordre, et on notera cette somme :

$$\boxed{S = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} \qquad \text{ou encore} \quad S = \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le p} a_{i,j}. \quad (1)}$$

1) Sommation ligne par ligne ou colonne par colonne :

a) Si on somme ligne par ligne :

On note σ_i la somme des éléments dans la ligne i. Ainsi $\sigma_1 = \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}$, $\sigma_2 = \sum_{j=1}^{p} a_{2,j}$ et d'une manière générale :

La somme des éléments de la ligne i est :

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}.$$

Il faut bien noter que dans cette formule les variables i et j jouent un rôle très différent : la variable i est externe au symbole $\sum$ alors que le j est le compteur *qui sert à sommer, variable interne au symbole $\sum$.*

Ainsi, si on choisit de d'abord faire la somme des éléments lignes par lignes, on peut calculer S comme :

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \Big) \quad (2)}$$

b) De même si on somme colonne par colonne : La somme τ_1 des éléments de la colonne 1 vaut $\tau_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$ et d'une manière générale :

La somme des éléments de la colonne j est : $\tau_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

De même, en faisant la somme des éléments colonne par colonne :

$$\boxed{S = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \Big). \quad (3)}$$

c) Exercice d'application : Calculer la somme $S_0 = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (i+j)$.

2) Un exemple de sommation en diagonale :

N.B. *On garde les notations du 1), mais on considère maintenant que $p = n$, autrement dit un tableau carré dont les entrées sont les $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.*

Considérons le tableau formé par les *indices* $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, à distinguer du *tableau des valeurs* donné au 1). On peut le voir comme un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ représenté dans un repère (peut-être australien) où l'axe des "abscisses" est vertical vers le bas et l'axe des ordonnés horizontal vers la droite :

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\cdots$	$(1,j)$	$\cdots$	$(1,n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$\cdots$	$(2,j)$	$\cdots$	$(2,n)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$\cdots$	$(3,j)$	$\cdots$	$(3,n)$
$\vdots$ $(i,1)$ $\vdots$	$(i,2)$ $\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	(i,j) $\vdots$	$\cdots$	$\vdots$ (i,n)
$(n,1)$		$\cdots$		(n,j)		(n,n)

a) On note $\Delta_k = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i-j = k\}$. A quoi correspond l'ensemble des indices dans Δ_0, Δ_1, Δ_{-1} sur le tableau ci-dessus ? Décrire d'une manière générale ce que représente Δ_k.

b) On note encore $S = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}$. On trouve aussi l'abus de notation courant suivant : $S = \sum\limits_{1\leq i,\, j\leq n} a_{i,j}$.

Justifier qu'on peut exprimer S sous la forme suivante :

$$S = \sum_{k=-N}^{N} \Big(\sum_{(i,j)\in\Delta_k} a_{i,j} \Big), \qquad (*)$$

en précisant la valeur de l'entier N.

N.B. : L'ensemble des indices $[\![1,n]\!]^2$ étant fixé, on notera plus simplement l'égalité $(*)$ sous la forme : $S = \sum\limits_{k=-N}^{N} \Big(\sum\limits_{(i,j),i-j=k} a_{i,j} \Big)$ (4).

c) **Exercice d'application :** Calculer de deux manières différentes : $S_1 = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |i-j|$.

3) Un exemple de sommation avec d'autres découpage de $[\![1,n]\!]^2$

Exercice : *Calculer de plusieurs manières différentes* $S_2 = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$ où $\max(i,j) \overset{def}{=} \begin{cases} i \text{ si } i \geq j \\ j \text{ sinon.} \end{cases}$

4) Produits de sommes

Rappel : Dans une écriture $\sum\limits_{i=1}^{n}$, on a dit que l'indice i est muet, interne au $\sum$. On peut donc l'utiliser dans plusieurs $\sum$ et écrire par exemple : $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ avec le même indice i.

Mais il convient d'être prudent pour les produits de la forme $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i)$.

En effet, par exemple si $n = 2$ et qu'on développe ce produit $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$ on aura quatre termes $a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$.

Pour bien développer $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i).(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i)$ l'écrire plutôt $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i).(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j)$.

Alors, la prop. suivante donne : $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i).(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j) = \sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_ib_j$

Plus généralement énonçons la :

Prop. – *Pour tout* $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, *et pour tout* $(a_1,\ldots,a_m) \in \mathbb{R}^m$, *et* $(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j) = \sum_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} a_ib_j.$$

Preuve – Par distributivité, en notant $S' = (\sum\limits_{j=1}^{n} b_j)$, on a : $(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j) = (\sum\limits_{i=1}^{m} a_i)S' = \sum\limits_{i=1}^{m}(a_iS')$.

Mais encore par distributivité, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $a_iS' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_ib_j$.

Donc $(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j) = \sum\limits_{i=1}^{m}(\sum\limits_{j=1}^{n} a_ib_j)$. Par le 1), ceci est une expression de $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} a_ib_j$. $\square$