

Chapitre B0 : fonctions trigonométriques et nombres complexes, première approche

L'analyse des sections angulaires contient des secrets géométriques et arithmétiques, qui, jusqu'ici n'ont été pénétrés par personne...

François Viète, 1540-1603, qui a commencé à rendre la trigonométrie « analytique ».

Cadre géométrique : le plan est muni d'un r.o.n. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on ne travaillera que dans ce repère. A ce titre, on peut identifier un point M avec le couple (a, b) de ses coordonnées et donc identifier¹ le plan avec $\mathbb{R}^2$.

De même pour un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) .

I Généralités sur les études de fonctions

1) Préliminaire : distinction fonction/expression

(i) *Les expressions* : Au lycée, une fonction est donnée par une formule, une *expression*, par exemple : $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2}$ où ici, on ne précise pas ce que vaut x , mais c'est un nombre réel.

Nous allons voir qu'il faut cependant distinguer cette *expression* et la *fonction* elle-même.

L'ensemble de définition D_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que la formule *fait sens*. Ici par exemple : $D_f =$

(ii) La fonction est l'application $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, c'est-à-dire le processus qui à chaque $x \in D_f$ associe son image $f(x)$.

Dans cette façon d'écrire la fonction ($x \mapsto f(x)$), le x est une variable muette. En revanche si on parle de « $f(x)$ » le x est une variable « parlante », faisant référence à un certain x fixé.

Ainsi si vous écrivez « la fonction $f(x) = \dots$ », il y a un problème, car $f(x)$ est un nombre réel pas une fonction !

Moralité : • on ne dit **PAS** « la fonction $f(x)$ », mais on dit « la fonction f ».
 • On ne dit pas « la fonction x^2 » (car x^2 est un nombre), mais on dit « la fonction $x \mapsto x^2$ ».
 • De même on pourra dire la fonction $\sin$, ou $x \mapsto \sin(x)$, mais PAS la fonction « $\sin(x)$ »

(iii) Si $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le graphe Γ_f de f est par déf. $\{(x, y) \in D \times \mathbb{R}, y = f(x)\}$.

(iv) Les fonctions ne sont pas toujours définies par des *formules* ou des *expressions* : on peut par exemple avoir des définitions *par cas* : par exemple si $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble on définit sa *fonction caractéristique* notée $\chi_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ Sauriez-vous dessiner le graphe de χ_Q ?

2) Propriétés à détecter pour réduire l'ensemble d'étude d'une fonction

a) Déf. (pour I symétrique par rapport à 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$)

f est *paire* ssi $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
 f est *impaire* ssi $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

b) Application :

réduction de l'ensemble d'étude : si f paire ou impaire, on l'étudie sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

c) Exemple de $f_n : x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}, n \in -\mathbb{N}$: f_n est paire si n pair, impaire si n impair.

Graphe : pour f paire (resp. impaire) Γ_f est symétrique par rapport à (Oy) (resp. à O).

Bien connaître les graphes de ces fonctions $x \mapsto x^n$

d) Autres symétries possibles : *Savoir retrouver les formules suivantes :*

1. En sens inverse, on verra qu'on a des raisons de dire qu'on peut, en sens inverse, partir de $\mathbb{R}^2$ pour aller vers un « objet mathématique » représentant ce qu'on a envie d'appeler un « plan physique »

- La droite d'éq. $x = a$ est axe de symétrie de Γ_f ssi $\forall t \in J, f(a+t) = f(a-t)$ ssi $\forall x \in I, f(x) = f(2a-x)$.
- Le point Ω de coord. (a, b) est centre de sym. de Γ_f ssi $\forall t \in J, b$ est le milieu de $[f(a-t), f(a+t)]$ i.e. $2b = f(a+t) + f(a-t)$.
- Dans ces deux cas, on étudie f sur $D_f \cap [a, +\infty[$.

e) Autre réd. de l'ensemble d'étude :

si f est T -périodique, étude sur un int. de longueur T puis transl. de vect. $k(T, 0)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

II Fonctions trigonométriques :

1) Les fonctions sin, cos, tan :

a) A partir du cercle trigonométrique :

(i) Pour un point M sur le cercle trigonométrique, l'angle polaire du point M est l'angle $(\vec{e}_1, \vec{OM})$, en radian, défini à 2π -près. Nous reviendrons sur la déf. de cette notion au B2 et C2.

(ii) Notion de congruence : (modulo 2π) **Déf.** $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \equiv y [2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + 2k\pi$.

(iii) Définition (provisoire) : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\cos(t), \sin(t))$ sont les coordonnées du point d'angle polaire t (en radian) sur le cercle trigonométrique.

Par déf. de l'angle en radian, elles sont 2π -périodiques.

Relation fondamentale : $\forall t \in \mathbb{R}, \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

(iv) Définition de $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ pour tout $t \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Interprétation de $\tan(t)$ avec la tangente au cercle.

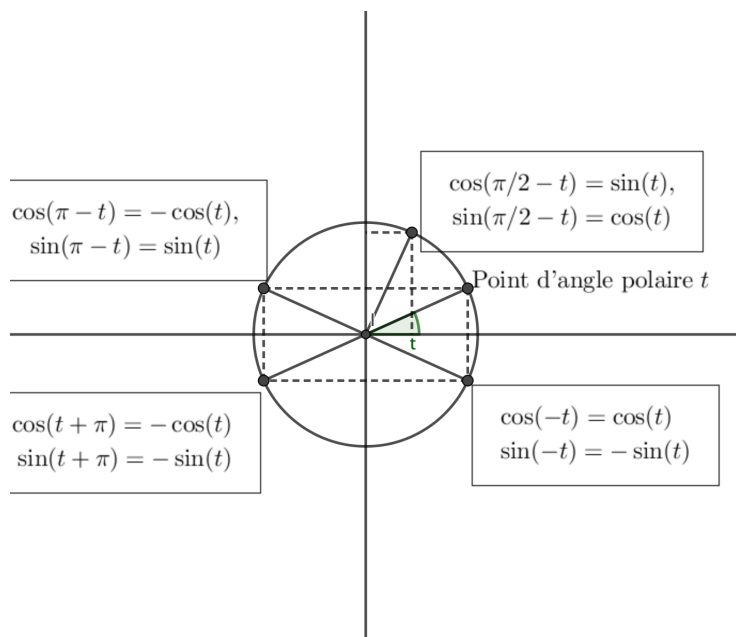
(v) Valeurs remarquables de ces fonctions sin, cos, tan pour $t = 0, t = \pi/6, t = \pi/4, t = \pi/3, t = \pi/2, \dots$

(vi) Premières relations immédiates, vues sur le cercle trigo. :

$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t + \pi) = -\cos(t), \sin(t + \pi) = -\sin(t)$: points antipodaux.

$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(-t) = \cos(t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$: cos est paire et sin est impaire.

$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t + \pi/2) = \cos(t)$ et $\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$. En physique, on peut formuler la première égalité en disant que cos est *en avance de phase* de $\pi/2$ par rapport à sin (voir déf. générale plus loin).



(vii) Pour tan : retenir $\tan(t + \pi) = \tan(t)$ pour tout $t \in D_{\tan}$, et $\tan(t + \pi/2) = -1/\tan(t)$.

b) Graphes (courbes représentative) de ces fonctions :

(i) Savoir les dérivées : $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. Enfin $\tan'(t) = 1/\cos^2(t)$.

On note aussi $\frac{d}{dt}(\sin(t)) = \cos(t)$, etc.

(ii) Savoir tracer les graphes : le nombre dérivée en un point donne la pente (appelé aussi coeff. directeur) de la tangente en ce point.

Savoir traduire sur le graphe toutes les propriétés vues au a)

(iii) Remarquer aussi, grâce à l'étude de la fonction $\sin$, que 2π est la plus petite période strictement positive de $\sin$ (comme de $\cos$).

c) Changement d'échelle : (i) si on considère $f : t \mapsto \sin(\omega t)$ (resp. $t \mapsto \cos(\omega t)$), où $\omega > 0$, alors la plus petite période strictement positive de f est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Le nombre ω s'appelle la *pulsation* du phénomène représenté par f .

(ii) Savoir dériver : $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$ et $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$.

Formule générale de dérivation d'une composée : $\frac{d}{dt} f(u(t)) = u'(t)f'(u(t))$ cf. B1.

Illustration sur $\sin^n$, $\cos^n$: qui joue le rôle de f , qui joue le rôle de u ?

2) Formules cos et sin d'une somme et signaux sinusoïdaux plus généraux

a) Formule pour le cos et sin d'une somme :

On admet ici (cf. B2) la formule suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

A partir de cette formule, il est facile de prouver la formule d'addition pour le sinus :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),$$

Retenir aussi, pour tous les a et b pour lesquels cette expression a un sens :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

b) Conséquences : Les formules de duplications (triplication...)

(i) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$,

(ii) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$,

(iii) $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$.

Pour continuer : $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$, $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

Pour continuer encore : voir IV avec les nombres complexes.

c) Deux formes utiles pour un signal sinusoïdal de pulsation ω :

La forme générale qu'on a introduit en physique ;

$$t \mapsto s(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

avec $A \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ fixés, appelés amplitude et phase à l'origine (ou phase initiale).

Remarque : pourquoi ne restreint-on pas la généralité en choisissant la fonction $\cos$ au lieu de la fonction $\sin$? Autrement-dit que dire des fonctions de la forme $t \mapsto A \sin(\omega t + \psi)$?

Une fonction s comme en (1) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$t \mapsto s(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t). \quad (2)$$

Savoir absolument passer non seulement de (1) à (2), mais aussi de (2) à (1).

Pour ce sens moins évident, être suffisant et chercher à identifier, ce qui conduit à choisir $A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, ensuite bien comprendre pourquoi il existe bien un φ tel que $\cos(\varphi) = \lambda/A$ et $\sin(\varphi) = \mu/A$.

Remarque : on obtient aussi $\tan(\varphi) = \mu/\lambda$. Attention la seule valeur de $\tan(\varphi)$ ne suffit pas à déterminer φ .

3) Transformation d'une somme de signaux sinusoïdaux

a) Additions de deux signaux de même pulsations, déphasés

Exercice cf. cours de physique sur les interférences :

pour $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ et $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Montrer que s peut s'écrire $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ où $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

b) Formules de transformations de sommes en produit :

(i) Formules SICOCOSICOCOSISI de transformations de somme en produit.

$$\begin{aligned}\sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right), \\ \cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

Retenir : on commence par $\sin(p) + \sin(q)$ attention au -2 à la dernière ligne.

N.B. On retrouvera plus agréablement ces formules avec les complexes au IV.

(ii) Applications de ces formules :

- en maths et en physique pour résoudre des équations cf. 4) ci-dessous

- en physique pour réinterpréter un des facteurs comme une amplitude qui varie (battement).

4) Exercices pour s'entraîner avec des équations trigonométriques simples :

Pour résoudre une équation trigonométrique :

a) Savoir les conditions d'égalités de deux $\cos$, $\sin$, $\tan$:

$$\begin{aligned}\bullet \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \text{ ou} \\ \theta_1 \equiv -\theta_2 [2\pi] \end{cases} \\ \bullet \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \text{ ou} \\ \theta_1 \equiv \pi - \theta_2 [2\pi] \end{cases} \\ \bullet \tan(\theta_1) = \tan(\theta_2) &\Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_2 [\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \text{ ou} \\ \theta_1 \equiv \theta_2 + \pi [2\pi] \end{cases}\end{aligned}$$

b) essayer de se ramener à une seule fonction trigo.

Exercice : résoudre les équations d'inconnue t suivantes : $\sin(t) = \cos(2t)$ et $\sin(t) + \cos(t) = \sqrt{2}\sin(2t)$.

c) Utiliser les formules de transformations de somme en produit pour factoriser :

Exercice : résoudre $\cos(2x) - \cos(x) = \sin(x) + \sin(2x)$.

III Dr Trigs learns complex numbers : comment les complexes révolutionnent la trigo

1) Notions de base sur les nombres complexes : module et argument.

a) Point de vue de terminale :

un nombre complexe est une *écriture* $z = a + ib$ avec a, b réels et $i^2 = -1$.

Somme et produit des nombres complexes.

Partie réelle $a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$: la partie imaginaire est un nombre réel (malgré son nom).

Remarque : pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), \\ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

Attention : l'analogie pour le produit est faux !

b) Liens essentiels avec la géométrie :

(i) $z = a + ib$ est représenté par le point de coordonnées (a, b) dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le point $M = (a, b)$ est dit d'affixe $z = a + ib$, on note parfois $M(z)$.

On dit aussi que le vecteur $\overrightarrow{OM}$, qui est aussi de coordonnées (a, b) a pour affixe z .

(ii) Important : géométriquement la somme des nombres complexes correspond à une somme de vecteurs !

Si $M(z)$ et $N(z')$ alors $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ a pour affixe $z + z'$.

(iii) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance de M à l'origine, aussi égale à $\|\overrightarrow{OM}\|$.

(iv) Pour tout $z \neq 0$, l'angle polaire $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ (défini à 2π -près) est appelé *l'argument de z* . On notera $\text{Arg}(z)$ l'unique valeur de l'argument dans $] -\pi, \pi]$, appelée *argument principal*.

c) Conjugaison :

(i) Déf. $\forall z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $\bar{z} = a - ib$

(ii) Prop. $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

$\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$.

(iii) Géométriquement : le point d'affixe $\bar{z}$ est symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe (Ox) .

d) Propriétés du module :

(i) Autre écriture du module : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

(ii) Module d'une somme : inégalité triangulaire *admise ici, mais vous pouvez chercher à le démontrer, voire mieux, chercher à comprendre l'enjeu d'une telle démonstration.*

(iii) Module d'un produit : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z.z'| = |z|.|z'|$.

2) Introduction de l'exp complexe :

a) Définition : (i) Déf. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta) \in \mathbb{C}$.

(ii) Géométriquement : le point d'affixe $e^{i\theta}$ est le point $M(\theta)$ d'angle polaire θ sur le cercle unité.

(iii) Valeurs remarquables $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$.

(iv) On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. C'est l'ensemble des affixes des points M dans le cercle unité.

$$\forall z \in \mathbb{U}, \exists ! \theta \in] -\pi, \pi], z = e^{i\theta} : \theta = \text{Arg}(z).$$

(v) C.N.S d'égalité : $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$.

En particulier, $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0 [2\pi]$.

b) Prop. algeb. fondamentale de l'exp. complexe :

(i) Conséq. des formules d'additions :

Prop. $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$ (inoubliable, c'est une exp.).

(ii) Rem (en sens inverse) :

Avec cette formule facile à retenir, on retrouve les formules sur $\cos(a+b)$ etc.

c) Prop. analytiques :

(i) Déf. de la dérivée pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

(ii) Appl. $\frac{d}{dx}(\exp(ix)) = i \exp(ix)$.

(iii) Moralité :

dériver = multiplier par i = tourner de $+\pi/2$.

Primitiver = diviser par i = multiplier par $-i$ = tourner de $-\pi/2$.

Formules $\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$, $\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$.

3) Ecriture polaire ou trigonométrique des nombres complexes (non nuls)

a) Prop.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, z = re^{i\theta} \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \text{Arg}(z).$$

b) D'une manière plus générale, on appellera écriture trigonométrique de z toute écriture $z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

- Si $\rho > 0$ alors $\rho = |z|$ et $\theta \equiv \text{Arg}(z) [2\pi]$
- Si $\rho < 0$ alors $\rho = -|z|$ et $\theta \equiv \text{Arg}(z) + \pi [2\pi]$.

c) Exemple : déterminer une écriture trigonométrique de $z = 1 + i$.

Cette écriture trigonométrique est, suivant les problèmes, beaucoup plus efficace que l'écriture $z = a + ib$!

Notamment pour les problèmes « multiplicatifs » : calculer $(1 + i)^{17}$.

4) Formules d'Euler

(i) Remarque sur le conjugué. Relations : $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

(ii) Cas de $z = e^{i\theta}$, relation $\bar{z} = e^{-i\theta}$.

Attention : Ne pas confondre $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ avec $e^{-i\theta}$.

$$(iii) \text{ Formule d'Euler : } \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ Attention au } i \text{ pour le sinus.}$$

(iii) Application : modules et arguments de $z = 1 + e^{i\theta}$ et plus généralement $z' = e^{i\theta} + e^{i\varphi}$.

Méthode de factorisation par l'exp. de la moyenne des arguments

(iv) **Une application :** démonstration *naturelle* formules SICOCOSICOCOSISI de transformations de somme en produit.

Comment (re)trouver ces formules ?

- Idée 1 : $\sin(p) + \sin(q) = \text{Im}(e^{ip} + e^{iq})$.
- Idée 2 : dans $e^{ip} + e^{iq}$ méthode de factorisation de $e^{i(p+q)/2}$, exp. de la moyenne.

5) Lien avec le produit scalaire :

a) (i) Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (a', b')$ en coordonnées cartésiennes peut être défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} := aa' + bb'$.

(ii) En coordonnées complexes $\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Re}(\bar{z}_{\vec{u}} z_{\vec{v}})$.

5) b) Application en coordonnées polaires : avec la formule du (ii) et en écrivant les affixes $z_{\vec{u}}$ $z_{\vec{v}}$ sous forme trigo. on obtient la formule bien connue :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

c) Il est souvent bien utile de calculer des normes au carré avec des carré scalaires, notamment pour les sommes :

$$\boxed{\text{Garder en tête que pour tout vecteur } \vec{u}, \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}}$$

En particulier pour les sommes : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ se développe agréablement :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

6) Lien avec les vecteurs de Fresnel utilisés en physique

a) Définition : en physique, pour chaque valeur du temps t , le vecteur de Fresnel associé au signal $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ est le vecteur $\vec{S}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$ de norme A et d'angle polaire $\omega t + \varphi$.

Autrement dit $M(t)$ est le point d'affixe $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$. On dit aussi que le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ a pour affixe $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$.

b) Application concrète pour la somme de deux signaux sinusoïdaux :

(i) La somme de deux signaux sera codée par la somme des vecteurs de Fresnel.

(ii) Retour au calcul fait à l'exercice II 3) a) : soit $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ et $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

En considérant $\vec{S}(t) = \vec{S}_1(t) + \vec{S}_2(t)$ les vecteurs de Fresnels correspondants, retrouver géométriquement que s peut s'écrire $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ où $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$.

IV Linéarisation, polynomialisation : via la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$

1) La formule du binôme de Newton pour $(a+b)^n$ pour n petit et a, b dans $\mathbb{C}$!

Calcul des coeff. avec le triangle de Pascal (admis cf. preuve au A2).

La formule générale avec un Σ sera vue au A2.

2) Polynomialisation (Tchebychev) :

a) (i) La formule d'Abraham de Moivre : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$.

(ii) Reformulation d'Abraham :
$$\begin{cases} \cos(nx) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) \\ \sin(nx) = \operatorname{Im}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n). \end{cases}$$

b) Application : Ecriture de $\cos(nx)$ comme polynôme en $\cos(x)$ pour $n = 3, 4$. Cas de $\sin(nx)$.

On développe le membre de droite d'Abraham avec Isaac, et on obtient la formule de Tchebychev donnant $\cos(nx)$ purement en fonction de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(nx)$ avec $\sin(x)$ et des puissances de $\cos(x)$.

c) Applications aux équations trigonométriques : on est ramené à des équations polynomiales d'inconnue $\cos(x)$ (resp. $\sin(x)$).

Exemple d'exercice :

(i) Ecrire $\cos(5x)$ sous la forme $P(\cos(x))$ avec P une fonction polynomiale.

(ii) En déduire un polynôme de degré 5 donc $\cos(\pi/10)$ est racine.

(iii) En déduire une écriture explicite de $\cos(\pi/10)$ à l'aide de racines carrées.

3) Linéarisation (sens inverse) :

a) Linéarisation et application au calcul de primitives :

(i) Linéariser, déf. : écrire comme combinaison linéaire des fonctions $\cos(kx), \sin(lx)$.

Lien avec la décomposition en harmoniques d'un signal périodique en physique.

(ii) Exemple $\cos^2$ et $\sin^2$ et application au calcul de primitive.

En physique, pour une onde lumineuse reçue en un point précis et variant dans le temps comme $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, les récepteurs sont sensibles à la *puissance moyenne reçue* qui est proportionnelle à $\int_0^T s^2(t) dt$: calcul ?

(iii) Méthode générale pour les $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ (n pas trop grand) ou même $\cos^p(x) \sin^q(x)$: Léonard linéarise (toujours avec Isaac).

Exple calcul de $\int_0^{\pi/2} \sin^6(t) dt$. Sert aussi pour les calculs des dérivées n -ièmes.

b) Transformation de $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ (produit en somme)

Deux méthodes l'une seulement à partir de $\cos(a+b)$, l'autre avec les complexes.