

DEVOIR SURVEILLÉ 1 (2H)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.) sont interdits.

Soignez la précision de la rédaction, ce qui ne signifie pas « en mettre des tonnes » : la précision, c'est de bien distinguer entre implique (donc) et équivaut (ssi)... par exemple ! Encadrez ou soulignez vos résultats, séparez clairement vos questions, la clarté de votre présentation est un élément d'appréciation.

Exercice 1.

- a) Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles quelconques de E .

Définition – On appelle **mintermes** (relatifs à A, B, C) les 8 sous-ensembles de E de la forme $A^\varepsilon \cap B^{\varepsilon'} \cap C^{\varepsilon''}$ où A^ε peut valoir A ou A^c et de même pour $B^{\varepsilon'}$ et $C^{\varepsilon''}$. Par exemple $A^c \cap B \cap C^c$ est un minterme.

Les huit mintermes correspondent aux huit zones du diagramme de Venn et tout ensemble fabriqué à partir de A, B, C avec les opérateurs $\cap, \cup$ et complémentaires peut s'écrire comme réunion de mintermes.

Question : On note $F = [((A \cap B) \cup C)^c \cap (A \cap B^c)] \cup [(B \cap C^c) \cap (A^c \cup C)]$. Ecrire F comme réunion de mintermes.

- b) Du point de vue du calcul sur les propositions, pour trois propositions P, Q, R un **minterme** est une proposition de la forme $P^\varepsilon \cdot Q^{\varepsilon'} \cdot R^{\varepsilon''}$ où P^ε désigne P ou $\text{NON}(P)$ et le point entre les propositions désigne le ET logique. En notant la négation avec une barre, par exemple : $P \cdot \overline{Q} \cdot \overline{R}$, qui signifie : $(P \text{ ET } \text{NON}(Q) \text{ ET } \text{NON}(R))$, est un minterme.

Toute proposition faisant intervenir les trois variables booléennes P, Q, R peut s'écrire un OU de mintermes, comme par exemple, en notant le ET avec un point et le OU avec un $\vee$ (vel en latin) :

$$G : P \cdot Q \cdot \overline{R} \vee \overline{P} \cdot \overline{Q} \cdot R \vee P \cdot Q \cdot R \vee \overline{P} \cdot Q \cdot R.$$

Cependant une telle écriture n'est pas la plus économique si par exemple on veut fabriquer un circuit codant G avec des portes logiques.

Question : donner une forme équivalente plus réduite de G qui permettrait d'implémenter G en utilisant le moins d'opérateurs logiques ET, OU, NON que vous pouvez (on ne demande pas le schéma avec les portes logiques).

- c) **Question :** donner, en le justifiant, un lien logique entre G et $Q \cdot R$.

- d) **Question :** que dire de la proposition $G \vee Q \cdot R$?

Exercice 2. a) Soient E, F, G, H quatre ensembles. Comparer $(E \times F) \cap (G \times H)$ et $(E \cap G) \times (F \cap H)$, en démontrant votre affirmation.

- b) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer qu'il n'existe pas de sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$.

Exercice 3. a) Montrer, *sans récurrence*, que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- b) Montrer, par la méthode de votre choix, que le résultat du a) est aussi valable pour tout $x \in]-1, 0[$.

- c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^n \geq 2^n n!$

Tournez la page s.v.p

Exercice 4. Soient $(a, b, c) \in [0, \pi]^3$ tels que $a + b + c = \pi$.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(c) \leq \frac{9}{4} \quad (*)$$

et de déterminer une C.N.S sur (a, b, c) pour que cette inégalité soit une égalité. Pour cela :

- a) Montrer que pour $(a, b, c) \in [0, \pi]^3$ tels que $a + b + c = \pi$, l'inégalité $(*)$ à démontrer est équivalente à :

$$2 \cos^2(a + b) + 2 \cos(a + b) \cos(a - b) + \frac{1}{2} \geq 0 \quad (**)$$

- b) En déduire que $(*)$ est vraie.
c) En déduire aussi une C.N.S. sur (a, b, c) pour que cette inégalité $(*)$ soit une égalité.

Exercice 5. a) On dit qu'un entier naturel non nul est *joli* s'il peut s'écrire comme la moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2, non nécessairement distinctes. Autrement dit n est joli ssi :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k, n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$$

Par exemple 92 est *joli* car $92 = \frac{2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^5 + 2^5 + 2^5}{8}$.

- i) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ est *joli* alors $n + 1$ est *joli*.
ii) Déterminer l'ensemble de tous les entiers naturels jolis.
b) i) Démontrer que tout entier naturel non nul s'écrit *de manière unique* comme somme de puissances de 2 *deux à deux distinctes*, sous la forme $n = \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$.
ii) Expliciter cette écriture pour $n = 52$, $n = 65$, $n = 78$.
iii) Ecrire une fonction Python (ou à défaut de fonction, un programme avec `input`) qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la liste $[a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]$ des exposants a_i , dans l'ordre strictement décroissant, de cette écriture : $n = \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$.
c) On dit qu'un entier naturel non nul est *superbe* s'il peut s'écrire comme la moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2, *deux à deux distinctes*. Par exemple 92 est en fait *superbe* car $92 = \frac{2^8 + 2^4 + 2^2}{3}$.
i) Montrer que 17 est *superbe*.
ii) Montrer qu'un entier n est *superbe* si, et seulement si, $2n$ est *superbe*.
iii) Montrer que 13 n'est pas *superbe*.