

DEVOIR SURVEILLÉ 1 SOLUTION

Exercice 1.

a) En appliquant De Morgan dans la première parenthèse

$$F = [((A^c \cup B^c) \cap C^c) \cap A \cap B^c] \cup [(B \cap C^c) \cap (A^c \cup C)]$$

Dans le premier crochet, on regroupe les $\cap$, puis dans les deux crochets on distribue le $\cap$ par rapport à $\cup$:

$$\begin{aligned} F &= [((A^c \cup B^c) \cap (C^c \cap A \cap B^c))] \cup [(B \cap C^c) \cap (A^c \cup C)] \\ &= [(A^c \cap C^c \cap A \cap B^c) \cup (B^c \cap C^c \cap A \cap B^c)] \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (B \cap C^c \cap C) \end{aligned}$$

En supprimant de cette union les termes contenant un $X \cap X^c$ qui sont vides, et en remplaçant les $X \cap X$ par X , on obtient :

$$F = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

b) On regroupe les termes et on utilise la distributivité du ET par rapport au OU

$$\begin{aligned} G &\Leftrightarrow (P.Q.\bar{R} \vee P.Q.R) \vee (\bar{P}.\bar{Q}.R \vee \bar{P}.Q.R) \\ &\Leftrightarrow (P.Q.(\bar{R} \vee R)) \vee (\bar{P}.R.(\bar{Q} \vee Q)), \end{aligned}$$

Comme $(\bar{R} \vee R)$ est toujours vraie, on peut l'enlever du ET et de même pour $(\bar{Q} \vee Q)$ donc :

$$G \Leftrightarrow PQ \vee \bar{P}.R$$

Culturel : il existe des méthodes générales pour trouver de telles expressions simplifiées, que vous étudierez peut-être un jour en électronique, comme celle des tableaux de Karnaugh....

c) Si $Q.R.$ est vraie autrement dit Q est vraie et R est vraie alors on peut distinguer deux cas :

- 1er cas : P est vraie, donc comme Q est vraie $P.Q.$ est vraie, donc $PQ \vee \bar{P}.R$ est vraie.
- 2ème cas : $\bar{P}$ est vraie et comme R est vraie, $\bar{P}.R$ est vraie donc $PQ \vee \bar{P}.R$ est vraie.

Ainsi on vient de montrer que si $Q.R.$ est vraie alors $PQ \vee \bar{P}.R$ est vraie donc on a montré que :

$$Q.R \Rightarrow PQ \vee \bar{P}.R.$$

d) Comme $Q.R \Rightarrow G$ on en déduit que :

$$Q.R \vee G \Leftrightarrow G.$$

Exercice 2. a) Pour tout x, y éléments de notre univers :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (E \times F) \cap (G \times H) &\Leftrightarrow ((x, y) \in E \times F) \text{ ET } (x, y) \in (G \times H), \quad \text{par déf. de } \cap, \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ ET } y \in F) \text{ ET } (x \in G \text{ ET } y \in H), \quad \text{par déf. de } \times, \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ ET } x \in G) \text{ ET } y \in F \text{ ET } y \in H, \quad \text{associativité, commutativité du ET,} \\ &\Leftrightarrow (x \in E \cap G) \text{ ET } (y \in F \cap H) \quad \text{par déf. de } \cap, \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (E \cap G) \times (F \cap H) \quad \text{par déf. de } \times. \end{aligned}$$

L'équivalence ainsi démontrée montre l'égalité d'ensemble : $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

b) **Remarque :** D est le disque unité fermé.

Par l'absurde, s'il existe des sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $D = A \times B$.

Alors comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $(\cos(\theta), \sin(\theta)) \in D$, on en déduit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) \in A$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) \in B$.

Ainsi $[-1, 1] \subset A$ et $[-1, 1] \subset B$. Mais alors $[-1, 1] \subset [-1, 1] \subset A \times B$ donc $[-1, 1]^2 \subset D$. Par exemple on aurait $(1, 1) \in D$, *contradiction*.

Exercice 3. a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme $(1+x)^n = 1+nx + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k$ (1).

Or comme $x \geq 0$, on sait que pour tout k , $\binom{n}{k} x^k \geq 0$, ce qui dans (1) entraîne $(1+x)^n \geq 1+nx$.

b) Soit $x > -1$. Notons $H(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$.

• Initialisation : pour $n = 0$, $H(0)$ dit que $(1+x)^0 \geq 1$ autrement dit que $1 \geq 1$, ce qui est vrai.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.

On a $(1+x)^n \geq 1+nx$, on multiplie les deux membres de cette égalité par $(1+x) \geq 0$, on obtient $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$ (1).

Or $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ (2).

Avec (1) et (2), on a $H(n+1)$ vraie.

La récurrence est établie. $\square$

c) **Remarque :** cet exercice est très proche de l'exercice 2 pl. 4.

On note $H(n) : (n+1)^n \geq 2^n \cdot n!$.

• Initialisation : $H(1)$ dit que $2^1 \geq 2^1 \cdot 1!$ ce qui est vrai.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ est vrai. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.

On sait que $(n+1)^n \geq 2^n n!$ et on veut montrer que $(n+2)^{n+1} \geq 2^{n+1} (n+1)!$.

Or en multipliant $H(n)$ par $2 \cdot (n+1)$ on a : $2(n+1)^{n+1} \geq 2^{n+1} \cdot (n+1)!$.

Donc pour montrer $H(n+1)$ il suffit de montrer que $(n+2)^{n+1} \geq 2(n+1)^{n+1}$ (*).

Or (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq 2$.

Et par l'inégalité du a), $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ où $x = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n+1} = 2$ et (*) est vraie ce qui suffit à montrer $H(n+1)$.

La récurrence est établie. $\square$

Exercice 4. a) Par linéarisation $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ et (*) est équivalente à :

$$\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2c) \geq -\frac{3}{2}.$$

Comme $c = \pi - a - b$, (*) équivaut encore à :

$$\cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2a+2b) \geq -\frac{3}{2}$$

Comme $\cos(2a) + \cos(2b) = 2\cos(a+b)\cos(a-b)$ et $\cos(2(a+b)) = 2\cos^2(a+b) - 1$, (*) est encore équivalente à :

$$2\cos^2(a+b) + 2\cos(a+b)\cos(a-b) + \frac{1}{2} \geq 0$$

b) En posant $X = \cos(a+b)$, la conclusion s'écrit :

$$X^2 + \cos(a-b)X + \frac{1}{4} \geq 0 \quad (**)$$

Le polynôme du second degré en la variable X a pour discriminant $\Delta = \cos^2(a-b) - 1 \leq 0$.

Ainsi ce polynôme est toujours positif, et la (*) est toujours vraie.

c) CNS d'égalité : il y a égalité dans (**) ssi il existe un $X \in \mathbb{R}$ tel que $X^2 + \cos(a-b)X + \frac{1}{4} = 0$.

Comme $\Delta \leq 0$, ceci ne se produit que ssi $\Delta = 0$. Or

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \cos^2(a-b) - 1 = 0 \Leftrightarrow a-b \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow a=b \quad \text{car } a, b \in [0, \pi].$$

Il y a égalité dans (*) ssi il y a égalité dans (**) pour un X de la forme $X = \cos(a+b)$.

Or la CNS d'égalité dans (**) étant $a=b$, l'équation s'écrit dans ce cas $X^2 + X + 1/4 = 0$ i.e $(X + 1/2)^2 = 0$ et donc équivaut à $X = -1/2$.

Ainsi il y a égalité dans (*) ssi $\begin{cases} a = b & \text{et} \\ \cos(a+b) = -1/2 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} a = b & \text{et} \\ \cos(2a) = -1/2 \end{cases}$ ssi (comme $a \in [0, \pi]$),

$a = b = \pi/3$.

Ainsi (comme $c = \pi - a - b$), la CNS d'égalité cherchée est que $a = b = c = \pi/3$ autrement que a, b, c soient les trois angles d'un triangle équilatéral.

Exercice 5. a) (i) Supposons que n est joli, il s'écrit $n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$ avec des exposants $a_i \in \mathbb{N}$.

Alors $n+1 = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k 2^{a_i} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ termes}} \right) = \frac{1}{2k} \left(\sum_{i=1}^k 2^{a_i} + \underbrace{2+2+\dots+2}_{k \text{ termes}} \right)$. et $(n+1)$ est donc bien joli.

(ii) Comme $1 = \frac{1}{1}(2^0) = \frac{1}{2}(2^0 + 2^0)$, on sait que 1 est joli. Par l'hérédité montrée au (i), on conclut tous les entiers non nuls sont jolis!

b) Sera repris en info et dans le corrigé papier.

c) (i) On remarque que $17 = \frac{1}{2}(2^5 + 2^1)$ donc 17 est superbe.

(ii) Sens facile : si n est superbe alors $n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$ avec des exposants a_i deux à deux distincts.

Alors $2n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{a_i+1}$ et les a_i+1 sont encore deux à deux distincts donc $2n$ est superbe.

Sens réciproque : si $2n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{b_i}$ avec des exposants b_i deux à deux distincts alors on distingue deux cas :

- 1er cas : tous les exposants b_i sont non nuls et $n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{b_i-1}$ avec le $b_i-1 \in \mathbb{N}$ deux à deux distincts, donc n est superbe.

- 2ème cas : l'un des b_i est nul. Mais par exemple en le notant b_1 (sans restriction de généralité), on a alors $2nk = 1 + \sum_{i=2}^n 2^{b_i}$ et tous les termes écrits ici sont pairs sauf le 1, ce qui donne une contradiction car $1 = 2nk - \sum_{i=2}^n 2^{b_i}$ serait pair. Donc ce cas ne se produit pas et on est donc toujours dans le premier cas.

(iii) Si 13 est superbe alors il s'écrit $13 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$ avec des exposants a_i deux à deux distincts.

Donc $13k = \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$.

Or $\sum_{i=1}^k 2^{a_i} \geq 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}$ car les a_i sont 2 à 2 distincts donc le plus petit est supérieur à 0, le second supérieur à 1 etc...

Donc $\sum_{i=1}^k 2^{a_i} \geq 2^k - 1$ et donc $13k \geq 2^k - 1$ (*).

Or $13 \times 7 = 91 < 2^7 - 1 = 127$ et on en déduit par récurrence que pour tout $k \geq 7$, $13k < 2^k - 1$.

Donc (*) force $k \leq 6$ et donc $13k \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$.

Or $26 = 2^1 + 2^3 + 2^4$, $39 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^5$, $52 = 2^2 + 2^4 + 2^5$, $65 = 2^0 + 2^6$, $78 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1$.

Aucune de ces écritures n'a un nombre de termes égal au nombre k de $13.k$.

Donc 13 n'est pas superbe.