

DM 2 : solutions

Problème 1 : Trouver pour α, β, γ réels, la valeur minimale de

$$|\cos(\alpha)| + |\cos(\beta)| + |\cos(\gamma)| + |\cos(\alpha - \beta)| + |\cos(\alpha - \gamma)| + |\cos(\beta - \gamma)|$$

Solution : *A ce jour personne n'a donné de solution. Indication : passer aux exponentielle complexes. Peut-être même que les variables les plus agréables seraient $u = e^{-2i\alpha}$, $v = e^{-2i\beta}$, $w = e^{-2i\gamma}$ ou quelque chose comme cela.*

Problème 2 : Soient f et g deux applications d'un ensemble A dans un ensemble B telles que $\forall (x, y) \in A^2, [f(x) = f(y) \text{ ou } g(x) = g(y)]$. Montrer que f ou g est constante.

Solution :

Remarque : Attention il ne faut pas croire qu'en général, on puisse ainsi "distribuer" un $\forall$ dans un ou.

Par exemple la prop. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \text{ ou } (x \leq 0)$ est vraie.

La prop. $[\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0] \text{ ou } [\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0]$ est fausse.

En part. elles ne sont pas équivalentes.

Conséquence de la remarque : L'énoncé est donc un cas miraculeux.

Supposons par ex. que f n'est pas constante. On veut montrer que g est constante.

On a donc un couple $(x, y) \in A^2$ tel que $f(x) \neq f(y)$ (1).

Par l'absurde si g n'est pas constante. Il existe un $z \in A$ tel que $g(x) \neq g(z)$ (2).

Mais alors par l'hypothèse de l'énoncé, (1) $\Rightarrow g(x) = g(y)$ (1') et (2) $\Rightarrow f(x) = f(z)$ (2').

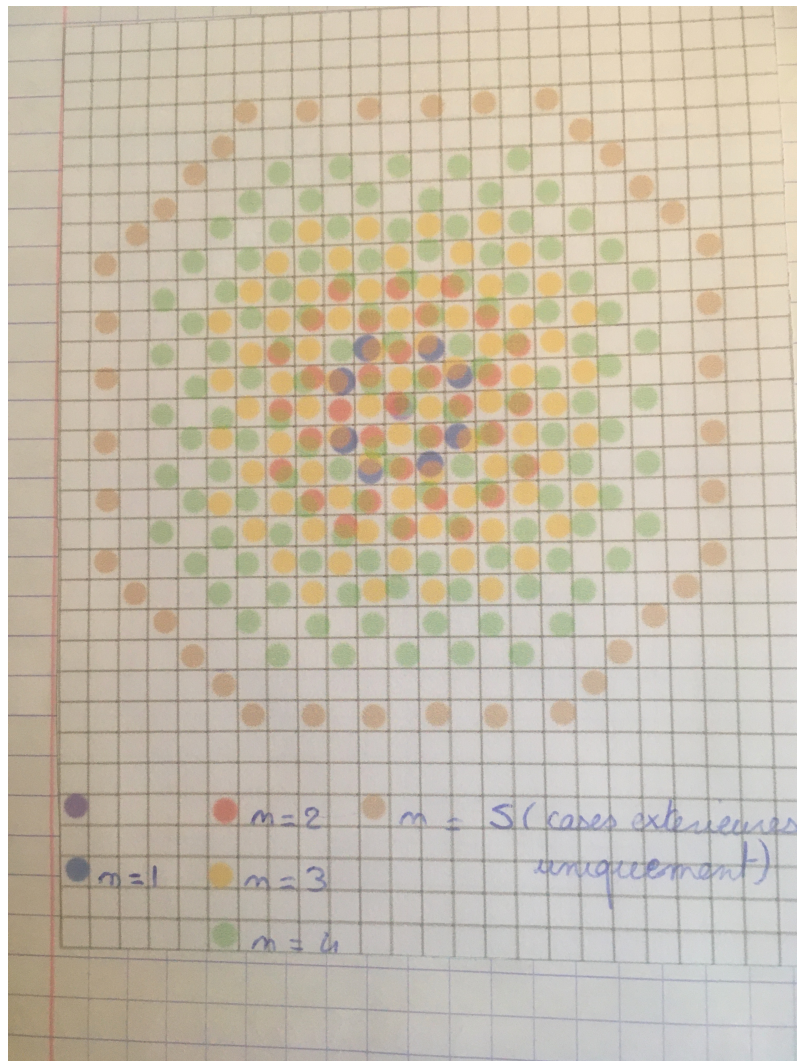
Mais $\begin{cases} f(x) = f(z) \\ f(x) \neq f(y) \end{cases} \Rightarrow f(y) \neq f(z)$ ce qui par l'hyp. de l'énoncé donne $g(y) = g(z)$ ce qui est

en contradiction avec (2) et (1').

Problème 3 : On considère un échiquier infini dans toutes les directions et on pose un cavalier sur une case, disons noire. Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $f(n)$ le nombre de cases différentes qu'il peut atteindre au bout de n mouvements. Par exemple on vérifie facilement que $f(1) = 8$. Déterminer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution (quatre bonnes solutions!) La plus concise est due à Ariane, avec un très beau dessin en prime (solution très proche de Lucie aussi). Les affirmations d'Ariane sur l'octogone demanderaient des justifications par récurrence (faites dans d'autres copies).

Robin et Iokannann ont plutôt commencé par dire que les solutions, à partir de $n = 3$ étaient dans un carré et on compté les cases qu'il fallait enlever au carré. Voir aussi le beau programme Python de Robin. La solution est beaucoup plus longue, mais on trouve paragraphe par paragraphe des preuves des propriétés qu'on voit, comme le fait que le polygone est bien « rempli » pour $n \geq 3$ ou bien la croissance de la taille.



Exercice 3:

sur cet exercice

On représente le nombre de cases différentes que le cavalier peut atteindre pour n allant de 1 à 5

On compte $f(1) = 8$ et $f(2) = 33$

(voir au dos)

On observe sur le dessin une régularité pour $n \geq 3$:

Le nombre de cases atteintes sont toutes les cases noires (à l'exception de la case à l'intérieur d'un octogone qui s'agrandit lorsque n augmente).

on peut, une fois cela vu pour $n=3$, le montrer par récurrence

On peut donc déterminer $f(3)$, $f(4)$ et $f(5)$ en sommant le nombre de cases par "rangée" de haut en bas

$$4+5+6+7+6+7+6+7+6+7+6+5+4 = 76 \text{ pour } n=3$$

$$5+6+7+8+9+8+9+8+9+8+9+8+9+8+7+6+5 = 129 \text{ pour } n=4$$

$$6+7+8+9+10+11+10+11+10+11+10+11+10+11+10+9+8+7+6 = 196 \text{ pour } n=5$$

En se basant sur ces sommes, on conjecture:

ce de couleur très de

$$\forall n \geq 3, f(n) = (n+2)(2n) + (n+1)(2n+1) + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n+i) \right)$$

$$f(n) = (n+2)(2n) + (n+1)(2n+1) + 2(n-1)n + 2 \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= 2n^2 + 4n + 2n^2 + n + 2n + 1 + 3(n-1)n$$

$$= 7n^2 + 4n + 1$$

TB

Tes remarques
successives

Exercice 3: sont
très justes

Très très bon travail
sur l'ex 3!

Une façon + commode de compter
les cases de l'octogone et

le programme python en annexe permet de générer
la suite recherchée et de visualiser le problème.

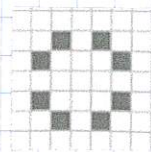
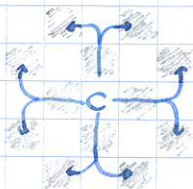
Bravo!

Afin de trouver le nombre de positions que le cavalier peut
atteindre on va se concentrer sur les positions qui lui
sont maximales.

I Premièrement le cavalier se déplaçant au maximum
de deux cases dans une direction il ne peut
atteindre, au maximum, ~~le~~ bout de n -cours que les cases
d'un côté de côté augmentant de 1 à chaque coup
et commençant à 1.

Cela représente $(n+1)^2$ cases

II Deuxièmement, un cavalier se déplaçant obligatoirement
d'un total de 3 cases il finit toujours sur une case
de la couleur opposée à sa case de départ



On peut donc, à chaque étape, soustraire au carré les emplacements possibles les cases de la couleur sur lequel le cavalier ne peut être.

Cependant les cotés du carré valant $n+1$, le nombre total de cases est de $(n+1)^2 = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{pair}}}{n^2} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{pair}}}{8n} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{impair}}}{1}$

Ainsi le nombre de case du carré est impair et il n'y a donc pas autant de cases blanches que noires.

Néanmoins, car le cavalier commence sur une case noire, les diagonales seront toujours noires et comme on ajoute, à chaque étape, au carré, un nombre pair de cases il y aura toujours une case noire de plus que de cases blanches.

Donc au rang n il y a

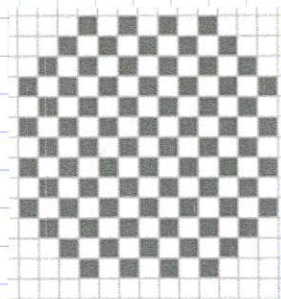
$$\frac{(n+1)^2 - 1}{2} \text{ cases blanches}$$

$$\text{et } \frac{(n+1)^2 - 1}{2} + 1 \text{ case noires}$$

$$= \frac{(n+1)^2 + 1}{2}$$

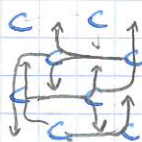
Le cavalier commençant sur une case noire et alternant de couleur à chaque coup il y a plus généralement $\frac{(n+1)^2 - (-1)^n}{2}$ case de la couleur opposée et donc sur lesquelles il ne peut être.

III De plus on remarque qu'à partir du rang 3 ^{ou} l'"intérieur" du motif formé par l'ensemble des cases que le cavalier peut atteindre est "rempli" c'est à dire qu'il occupe toutes les cases de la colonne qu'il peut atteindre.



De plus on remarque que si un espace est "rempli" au rang n il le restera au rang $n+1$:

Bien

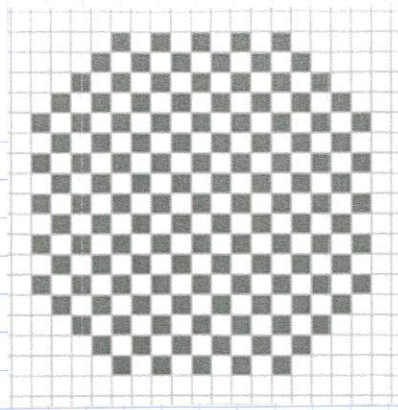


Ainsi à partir du rang 3 le motif est "rempli"

Par conséquent enlever les cases de la couleur opposée suffit à conserver toutes les cases atteignables par le cavalier mais surtout de les avoir toutes ; quant il s'agit de l'intérieur du motif.

Par ailleurs les contours du motif général sont faciles à déterminer: tout en se déplaçant de deux dans une direction un cavalier se déplace de un dans une direction perpendiculaire au maximum.

Ainsi il lui est impossible d'atteindre les coins du carré et il restera des triangles inoccupés de longueur n dans chacun des quatre coins.



On a déjà retiré les cases d'une certaine couleur et le nombre de cases supplémentaires à retirer dépend de la parité.

Pour n pair: le cavalier est sur les noirs et le nombre de cases par diagonale est impair. Dans ce cas l'angle

de côté n il y a $\frac{n}{2}$ diagonales noires sur lequel

le cavalier pourrait être mais inatteignable.

on

On doit donc soustraire $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2i-1 = \frac{n}{4}(1+n-1) = \frac{n^2}{4}$

Parallèlement (mutatis mutandis) avec n impair on

doit soustraire

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 2i = \frac{(n-1)}{4}(2+n-1) = \frac{n^2-1}{4}$$

Ainsi plus généralement au rang n on doit

soustraire pour chaque des triangles

$$\frac{1}{4}(n^2 - \frac{1-(-1)^n}{2})$$

Soit au total $n^2 - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$

Ainsi la formule générale est

$$\underbrace{(4n+1)^2}_{\text{I}} - \left(\underbrace{\frac{(4n+1)^2}{2}}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{2}}_{\text{III}} \right) - \left(n^2 - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \right)$$

Soit

$$\frac{(4n+1)^2}{2} - 2n^2 + 1 = \frac{16n^2 + 8n + 1 - 2n^2 + 1}{2}$$

$$\boxed{7n^2 + 4n + 1} \quad \boxed{\text{Bingo}}$$

Après vérification par simulation informatique on trouve bien que cette formule semble marcher pour $n \geq 3$

Ainsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lll} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 8 \\ 2 & \mapsto & 33 \\ n \geq 3 & \mapsto & 7n^2 + 4n + 1 \end{array}$$