# DM 1 équations, logique et trigonométrie

*Pour le lundi 14 septembre*

**Problème. 1**

Résoudre suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'équation $(E_m)$ suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en commençant par préciser l'ensemble de définition de l'équation :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = m\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

**Problème. 2 : ouverture vers les S.I. ou l'Option Info...**

.

**2.1 Constituants premiers d'une fonction booléenne écrite sous forme de OU :**

On considère ici par exemple trois variables booléennes $X_1, X_2, X_3$, qui peuvent chacune valoir `V` ou `F` mais on remplace ici ces valeurs respectivement par `1` ou `0` par commodité. On écrira aussi des égalités entre les booléens plutôt que des équivalences entre propositions.

Pour simplifier les notations dans ce problème, on utilisera [1] les notations $\vee$ et . pour désigner respectivement le OU et le ET logiques, et $\overline{X}$ pour désigner NON$(X)$.

(La notation . se comprend bien car le ET correspond bien à la multiplication sur $\{0,1\}$)

On considère pour notre exemple la fonction

$$F\ :\ (X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_1.X_2) \vee (\overline{X_2}.X_3) \vee (\overline{X_1}.X_3).$$

On voit que $F(X_1, X_2, X_3)$ s'écrit comme un OU de trois termes qui sont $(X_1.X_2)$, $(\overline{X_2}.X_3)$ et $(\overline{X_1}.X_3)$ qu'on appellera **constituants** de (cette écriture) de $F$.

Bien sûr l'écriture de $F(X_1, X_2, X_3)$ comme un OU de plusieurs termes n'est pas unique et on va voir que certains constituants ont plus d'importance que d'autres.

Bien sûr si un constituant de $F(X_1, X_2, X_3)$ vaut `1` alors $F(X_1, X_2, X_3)$ vaut `1`

**Définition :** Un constituant $C$ est **non premier** si l'on peut *enlever* une des variables $X_i$ apparaissant dans $C$ pour obtenir une expression $C'$ qui a encore la propriété que si $C'$ vaut 1 alors $F$ vaut 1.

Sinon on dira que $C$ est un **constituant premier** de $F$.

**N.B** Les définitions données ici s'appliquent à une fonction $F$ d'un nombre $n$ quelconques de variables booléennes $X_1, \dots, X_n$.

a) Montrer que $X_1.X_2$ est un constituant premier de $F$.

b) Montrer qu'en revanche les deux autres constituants de $F$ ne sont pas premiers.

c) En déduire une écriture plus simple de $F$ comme un OU de seulement deux constituants.

**2.2. Application à un problème de minimisation**

Un atelier reçoit trois commandes $C_1, C_2, C_3$ qui peuvent être réalisées au moyen d'au plus cinq machines $M_1, \dots, M_5$. On désigne par $c_i$ la variable booléenne qui vaut 1 si la commande $C_i$ est exécutée et 0 sinon, et $X_i$ la variable booléenne la machine $M_i$ est utilisée ».

Les variables booléennes $c_i$ et $X_i$ peuvent prendre les valeurs `1` ou `0` pour `V` ou `F`. Pour exécuter $C_1$, on peut avoir recours aux deux machines $M_1$ et $M_3$ ou bien à la machine $M_4$ ce qu'on écrira :

$$c_1 = (X_1.X_3) \vee X_4$$

De même on écrit les autres méthodes de réalisation des commandes :

$$\begin{aligned} c_2 &= (X_2.X_4) \vee (X_1.X_5), \\ c_3 &= (X_2.X_5) \vee X_3. \end{aligned}$$

1. ce qu'on ne fera pas à part ici en maths mais que vous ferez en informatique ou S.I., éventuellement avec encore d'autres notations pour le $\vee$

En outre une contrainte technique $t_1$ exige que ou bien on n'utilise pas la machine 4 ou bien qu'on utilise la machine 2 :

$$t_1 = X_2 \vee \overline{X_4}$$

et une deuxième contrainte technique s'écrit :

$$t_2 = (X_1.\overline{X_2}) \vee (X_4.X_5) \vee (X_2.X_3).$$

La fonction booléenne qui vaut 1 si, et seulement si, toutes les commandes sont honorées et les contraintes techniques respectées est donc :

$$F : (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \mapsto c_1.c_2.c_3.t_1.t_2$$

Supposons que le coût de fonctionnement $A_i$ des machines $M_i$ en milliers d'euros soit le suivant :

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_i$ | 7 | 5 | 3 | 6 | 2 |

Le but de ce petit problème est de minimiser la dépense totale : $D(X_1, \dots, X_5) = \sum_{i=1}^{5} A_i.X_i$.

a) Démontrer que :

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (X_2.X_4.X_5) \vee (X_2.X_3.X_4) \vee (X_1.X_2.X_3.X_5) \vee (X_1.\overline{X_2}.X_3.\overline{X_4}.X_5).$$

*Indication* – Calcul un peu long, mais penser à chaque étape à simplifier le résultat trouvé en enlevant les constituants qui ne servent pas, penser aussi à laisser les variables dans l'ordre $1, 2, \dots, 5$ pour que ce soit lisible.

b) Montrer que le constituant $X_1.\overline{X_2}.X_3.\overline{X_4}.X_5$ n'est *pas* premier et le remplacer par un constituant ne faisant intervenir que 4 variables au lieu de 5.

c) Calculer le coût des quatre constituants de $F$ écrite sous la forme du b) et conclure sur la solution la moins chère.

**Problème. 3**

Un sapin et un peuplier sont plantés au bord d'un chemin horizontal (voir figure).

Du pied $B$ du peuplier, on a mesuré l'angle d'élévation du sapin. On a trouvé $\widehat{ABS} = \alpha$.

Du pied $A$ du sapin, on a mesuré l'angle d'élévation du peuplier. On a trouvé $\widehat{BAP} = 2\alpha$.

Ah zut... on a oublié de noter combien valait $\alpha$ !

En se plaçant au milieu $I$ de $[AB]$ on voit les sommets des deux arbres avec un angle droit.

Connaissant la distance $a$ entre les pieds $A$ et $B$ de deux arbres, calculer la hauteur de chacun d'eux.

**A.N.** $AB = a = 36$ mètres.