

DM 1 : solutions

Problème 1 :

N.B. Les cartouche sont ce que dit le lutin bleu, pas sur une copie !

Réflexe de bonne éducation : Toujours commencer par l'ensemble de définition de l'équation

Ici l'équation est bien définie si, et seulement si $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} \geq 0 \\ x + \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}$ ce qui équivaut à : $x \geq 1$

Ainsi l'équation est définie ssi $x \in [1, +\infty[$.

Notons (E) l'équation de l'énoncé, où par commodité, on pose $X = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \sqrt{X^2 + X} - \sqrt{X^2 - X} = m \frac{X}{\sqrt{X^2 + X}}, \\ &\Leftrightarrow \sqrt{X^2 + X}(\sqrt{X^2 + X} - \sqrt{X^2 - X}) = mX, \\ &\Leftrightarrow X^2 + X - \sqrt{X^4 - X^2} = mX, \\ &\Leftrightarrow X^2 + X - X\sqrt{X^2 - 1} = mX \quad \text{car } X \geq 0; \\ &\Leftrightarrow X + 1 - \sqrt{X^2 - 1} = m \quad \text{en simplifiant par } X \neq 0 \\ &\Leftrightarrow X + 1 - m = \sqrt{X^2 - 1} \quad (E_1) \end{aligned}$$

L'idée est d'isoler la racine carrée pour s'en débarrasser, mais pour cela besoin d'une mise au carrée... qui fait perdre une information si l'on n'y prend garde

Pour bien garder l'information :

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X + 1 - m \geq 0 & (I_1) \quad \text{et} \\ (X + 1 - m)^2 = X^2 - 1 & (E_2) \end{cases}$$

On résout (E_2) puis on n'oubliera pas la contrainte supplémentaire donnée par (I_1) : $X + 1 - m \geq 0$.

$$\begin{aligned} (E_2) &\Leftrightarrow X^2 + 2(1 - m)X + (1 - m)^2 = X^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 2(m - 1)X = m^2 - 2m + 2 \quad (E_3) \end{aligned}$$

Beware of dividing by zero !!

• **1er cas : $m = 1$.** L'équation E_3 devient $0 = 1$ impossible.
Donc si $m = 1$ (E_3) n'a pas de solution et donc (E) non plus.

• **2ème cas : $m \neq 1$.** Dans ce cas :

$$\begin{aligned} (E_3) &\Leftrightarrow X = \frac{m^2 - 2m + 2}{2(m - 1)}, \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{m^2 - 2m + 2}{2(m - 1)}, \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{m^2 - 2m + 2}{2(m - 1)} \right)^2 & (E_4) \\ \text{et } \frac{m^2 - 2m + 2}{2(m - 1)} \geq 0 & (I_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Au total $(E) \Leftrightarrow (E_4) \text{ ET } (I_1) \text{ ET } (I_2)$.

Ainsi les solutions x de (E) sont données en fonction de m par l'équation (E_4) à condition que les deux inégalités (I_1) et (I_2) soient réalisées.

• Pour I_2 : On remarque $m \mapsto m^2 - 2m + 2$ est un polynôme du second degré à discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 2 < 0$ donc reste toujours strictement positif.

Ainsi $(I_2) \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

• Pour I_1 : avec (E_4) ,

$$\begin{aligned} (I_1) &\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 2}{2(m - 1)} + 1 - m \geq 0, \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 - 2(m - 1)^2 \geq 0 \quad \text{sachant déjà que } m > 1 \text{ par } (I_2) \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 - 2(m^2 - 2m + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 2m \geq 0 \Leftrightarrow m(2 - m) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m \leq 2 \quad \text{sachant déjà que } m > 1 \text{ par } (I_2). \end{aligned}$$

On conclut que :

(E) admet une solution $x \in [1, +\infty[$ si, et seulement si, $m \in]1, 2]$ et dans ce cas cette solution est unique et vaut :

$$x = \left(\frac{m^2 - 2m + 2}{2(m - 1)} \right)^2.$$

Probleme 2

2.1 a) On note $C = X_1.X_2$. Si on enlève la variable X_2 dans C on obtient X_1 . Si on remplace X_1 par 1, et donc $\overline{X_1}$ par 0, on obtient :

$$F(1, X_2, X_3) = X_2 \vee (\overline{X_2}.X_3) \vee (0.X_3) = X_2 \vee (\overline{X_2}.X_3).$$

qui vaut 0 si $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$, donc qui ne vaut pas forcément 1.

De même si on enlève X_1 dans C , on obtient X_2 et en prenant $X_2 = 1$ on obtient :

$$F(X_1, 1, X_3) = X_1 \vee (\overline{X_1}.X_3).$$

qui vaut 0 si $X_1 = 0$ et $X_3 = 0$.

Ainsi, on a montré que $C = X_1.X_2$ est un constituant premier de F .

Remarque : On peut bien sûr aussi faire une table de vérité mais c'est plus long et on n'y gagne pas en compréhension.

b) Dans $C = \overline{X_2}.X_3$ (comme dans $\overline{X_1}.X_3$) si on enlève le premier constituant on trouve X_3 .

Or si on remplace X_3 par 1, on obtient :

$$F(X_1, X_2, 1) = X_1.X_2 \vee \overline{X_1} \vee \overline{X_2}$$

Or cette dernière fonction vaut toujours 1 comme on peut le vérifier en l'écrivant avec De Morgan :

$$X_1.X_2 \vee \overline{X_1} \vee \overline{X_2} = X_1.X_2 \vee \overline{X_1.X_2}$$

to be or not to be.

Conclusion : Ainsi $\overline{X_2}.X_3$ n'est pas un constituant premier de F puisque $F(X_1, X_2, 1) = 1$.

On montre de même que $\overline{X_1}.X_3$ n'est pas un constituant premier de F .

c) Commençons par deux remarques que les plus scrupuleux(-ses) d'entre vous montreraient avec des T.V. :

Remarque 1 (formulée dans le langage des prop.) Si P et Q sont deux propositions et si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors Q est équivalente à P OU Q .

Application de la remarque 1 : ici, comme $X_3 = 1 \Rightarrow F(X_1, X_2, X_3) = 1$ on peut rajouter le terme $\vee X_3$ à la fin de l'écriture de $F(X_1, X_2, X_3)$. Donc

$$F(X_1, X_2, X_3) = (X_1.X_2) \vee (\overline{X_2}.X_3) \vee (\overline{X_1}.X_3) \vee X_3$$

Remarque 2 (formulée dans le langage des prop.) Si P et Q sont deux propositions, alors P OU $(P$ ET $Q)$ équivaut à P .

Application ici : $(\overline{X_1}.X_3) \vee X_3 = X_3$ et de même $(\overline{X_2}.X_3) \vee X_3 = X_3$.

Ainsi on a montré que :

$$F(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \cdot X_2) \vee X_3$$

2.2. a) Pour plus de lisibilité on enlève les parenthèses autour des produits, qui sont considérés ici comme prioritaires par rapport au $\vee$.

Par (double)-distributivité et en tenant compte que $X_i^2 = X_i$:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (X_1 \cdot X_3 \vee X_4) \cdot (X_2 \cdot X_4 \vee X_1 \cdot X_5) \\ &= X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \vee X_1 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 \vee X_1 X_4 X_5 \end{aligned}$$

Comme expliqué au 2.1. comme $X_2 \cdot X_4 \Leftarrow X_1 X_2 X_3 X_4$, on peut enlever ce dernier terme et donc :

$$c_1 \cdot c_2 = X_1 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 \vee X_1 X_4 X_5.$$

On en déduit (encore par double distributivité) que :

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 &= (X_1 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 \vee X_1 X_4 X_5) \cdot (X_2 \cdot X_5 \vee X_3), \\ &= X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_1 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_2 X_4 X_5 \vee X_1 X_3 X_4 X_5, \\ &= X_1 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue en enlevant les constituants impliqués par les autres.

On poursuit la distributivité :

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot t_1 &= (X_1 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4) \cdot (X_2 \vee \overline{X_4}), \\ &= (X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_3 \overline{X_4} X_5 \vee X_2 X_4 \overline{X_4} \cdot X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \overline{X_4}) \end{aligned}$$

Mais $X_4 \overline{X_4} = 0$ et on peut donc enlever les deux constituants contenant ces termes, donc :

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot t_1 &= X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_3 \overline{X_4} X_5 \\ c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot t_1 \cdot t_2 &= (X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_3 \overline{X_4} X_5) \cdot (X_1 \cdot \overline{X_2} \vee X_4 \cdot X_5 \vee X_2 \cdot X_3) \end{aligned}$$

En développant :

$$= X_1 \overline{X_2} X_3 \overline{X_4} \cdot X_5 \vee X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 X_5 \vee X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \vee X_1 X_2 X_3 \overline{X_4} X_5$$

(on n'a pas écrit les constituants contenant $X_2 \cdot \overline{X_2}$ ou $X_4 \cdot \overline{X_4}$)

En enlevant les constituants impliqués par d'autres :

$$F(X_1, \dots, X_5) = X_1 \overline{X_2} X_3 \overline{X_4} \cdot X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_2 X_3 X_4$$

b) **Remarque** (règle du consensus analogue à celle vue pour les OU en exercice) pour toutes variables booléennes G, H , on a $G \cdot X_2 \vee H \cdot \overline{X_2} \Rightarrow G \cdot H$

Application ici dans l'expression trouvée à la fin du a), on en déduit que :

$$X_1 \overline{X_2} X_3 \overline{X_4} \cdot X_5 \vee X_1 X_2 X_3 X_5 \Rightarrow X_1 X_3 \overline{X_4} X_5$$

Donc on ne change pas F en lui rajoutant le constituant $X_1 X_3 \overline{X_4} X_5$ et comme celui ci est impliqué par $X_1 \overline{X_2} X_3 \overline{X_4} \cdot X_5$, on écrit finalement :

$$F(X_1, \dots, X_5) = X_1 X_3 \overline{X_4} \cdot X_5 \vee X_2 X_4 X_5 \vee X_1 X_2 X_3 X_5 \vee X_2 X_3 X_4$$

c) Avec les coûts de $X_i = 1$ donnés dans l'énoncé :

- Coût de $X_1 X_3 \overline{X_4} \cdot X_5 = 1 : 7 + 3 + 2 = 12$.

- Coût de $X_2 X_4 X_5 = 1 : 5 + 6 + 2 = 13$

- Coût de $X_2 X_3 X_4 = 1 : 5 + 3 + 6 = 14$.

- Coût de $X_1 X_2 X_3 X_5 = 1$: inutile à calculer car supérieur à celui de $X_1 X_3 X_5 = 1$ qui est le même que le premier coût calculé.

Parmi les constituants trouvés, celui de moindre coût est donc $X_1 X_3 \overline{X_4} \cdot X_5$. La solution la moins chère avec cette écriture de F est donc de faire fonctionner 1, 3, 5 et pas 4.

Toutefois il n'est pas complètement clair qu'avec une autre écriture de F on ne puisse pas trouver moins cher.

Probleme 3 Dans les triangles rectangles SAB et PBA , on voit que :

$$\begin{cases} AS = a \tan(\alpha), \\ BP = a \tan(2\alpha) \end{cases} \text{ avec } 2\alpha \in]0, \pi/2[. \quad (1)$$

(M1) Notons $\beta = \widehat{ATS} \in]0, \pi/2[$. L'hypothèse de l'énoncé dit alors que $\widehat{BIP} = \frac{\pi}{2} - \beta$. Dans les triangles rectangles SAI et PBI , on a :

$$\begin{cases} AS = \frac{a}{2} \tan(\beta), \\ BP = \frac{a}{2} \tan(\frac{\pi}{2} - \beta). \end{cases} \quad (2)$$

En comparant les systèmes (1) et (2), on obtient le système à deux inconnues α et β :

$$\begin{cases} \tan(\alpha) = \frac{1}{2} \tan(\beta), \\ \tan(2\alpha) = \frac{1}{2} \tan(\frac{\pi}{2} - \beta). \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Or par formules trigonométriques, on a (3) } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \tan(\alpha) = \tan(\beta), \\ \frac{4 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\beta)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \tan(\alpha) = \tan(\beta), \\ 8 \tan^2(\alpha) = 1 - \tan^2(\alpha) \end{cases} \quad (4)$$

Avec l'équation (4) et $\tan(\alpha) > 0$, on obtient comme unique solution $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$.

On conclut que $\boxed{AS = \frac{a}{3} \text{ et } BP = \frac{3a}{4}}$

(M2) Avec la notion de *triangle semblables* : *Au chapitre C2, nous étudierons les transformations du plans appelées similitudes : les propriétés des triangles semblables que vous avez admises au collège se déduiront de cette étude.*

On remarque que dans le triangle rectangle SIA , on a : $\widehat{STA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ASI}$ (1).

D'autre part, comme $\widehat{SIP} = \frac{\pi}{2}$ et que $\widehat{STA} + \widehat{BIP} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (2), on déduit de (1) et (2) que :

$$\widehat{BIP} = \widehat{ASI} \quad (3)$$

Comme les triangles ASI et IPB sont rectangles, on déduit de (3) qu'ils ont leurs angles deux à deux égaux, *ce qui caractérise les triangles semblables*. Une autre caractérisation de ces triangles est alors que les côtés sont deux à deux proportionnels et précisément ici notamment que :

$$\frac{AI}{PB} = \frac{SA}{IB}.$$

Ici comme $AI = IB = \frac{a}{2}$ on obtient donc que $PB \cdot SA = \frac{a^2}{4}$ (4).

Or

$$\begin{cases} SA = a \tan(\alpha), \\ PB = a \tan(2\alpha) \end{cases} \text{ avec } 2\alpha \in]0, \pi/2[.$$

donc (4) devient :

$$\tan(\alpha) \tan(2\alpha) = \frac{1}{4} \quad (5)$$

Avec la relation $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$, (5) devient :

$$\frac{2 \tan^2(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = \frac{1}{4},$$

et finalement $\tan^2(\alpha) = \frac{1}{9}$ ce qui donne (puisque $\tan(\alpha) > 0$), $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$.

Même conclusion.