

Exercice 1. Dans $\mathcal{E}$ affine de dim.3 muni d'un repère, donner un système d'équations de la droite (D) dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$ et rencontrant les deux droites : $(D_1) \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad (D_2) \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Exercice 2 (Un problème de rencontre en dim. 2 qui se résout en dim. 3). On considère quatre fantômes qu'on assimilera à des points $F_1, \dots, F_4$ qui se déplacent chacun suivant un mouvement rectiligne uniforme dans un même plan P , mais chacun avec sa vitesse propre. Mieux on suppose que les vitesses sont deux à deux distinctes.

On suppose que parmi les six paires de fantômes, il y en a cinq qui se traversent à des instants $t_1, \dots, t_5$ deux à deux distincts. Montrer que la sixième paire se traverse aussi.

Indication – Comme il ne s'agit pas seulement d'intersection de trajectoire mais de rencontre en des temps précis, il est avantageux de travailler dans l'espace de dim. 3 de coord (t, x, y) où t est le temps et (x, y) des coordonnées dans le plan où "vivent" les fantômes.

Exercice 3. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(2) = 1\}$. L'ensemble F est-il un s.e.v., un sous-espace affine de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Si oui préciser sa direction?

Exercice 4 (plus abstrait!). Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux sous-espaces affines de E , de directions F_1 et F_2 tels que $F_1 + F_2 = E$, montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est non vide.

Exercice 5. a) Rappeler les trois axiomes définissant une norme sur un $\mathbb{R}$ -e.v. E

b) Montrer que si N est une norme, et B une boule pour N c'est à dire si $B = \{x \in E, N(x-a) < r\}$ (boule ouverte de centre a et de rayon r) alors B est convexe.

c) Montrer réciproquement que si N est une application vérifiant les deux premiers axiomes des normes (i.e. tout sauf l'inégalité triangulaire) et telle que l'ensemble $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ est convexe, alors N est une norme.

Indication – On pourra utiliser un barycentre convenable des points $x/N(x)$ et $y/N(y)$.

Exercice 6. a) Soit $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$.

(i) Montrer à l'aide de l'exercice précédent que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Dessinez la boule unité pour la norme N_p si $p = 1, 3/2, 2, 5/2$.

N.B. Si $p = 2$ on sait démontrer que N_2 est une norme autrement : comment?

De même il existe une preuve plus « directe » de l'inégalité triangulaire pour N_p via une inégalité appelée l'inégalité de Hölder....

b) Soit $p \in [1, +\infty[$ un nombre réel. Pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on pose $N_p(f) = (\int_a^b |f|^p)^{1/p}$.

Même question qu'au a) (i)

c) Avec les notations du a), montrer que pour tout x fixé, $N_p(x) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} N_\infty(x) = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

d) Faire de même avec les notations du b) pour $N_p(f)$ quand $p \rightarrow +\infty$ (c'est plus difficile!).

Exercice 7 (Théorème de Gauss-Lucas : un grand classique sur la localisation des racines des polynômes). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de racines $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ (non nécessairement distinctes).

(i) Montrer que si z est une racine de P' qui n'est pas une racine de P , alors :

$$\sum_{k=1}^n \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0.$$

(ii) En déduire que les racines de P' sont toujours dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Exercice 8 (Inégalité générale de convexité, le point de vue des intégrales).

a) On rappelle que si g est convexe sur I , alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a : $g(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k g(x_k)$

Ex. de cours de la banque CCP : redémontrer cette inégalité, appelée inégalité de Jensen.

b) En déduire via les sommes de Riemann, que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, convexe, $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ alors : $g(\int_0^1 f(t)dt) \leq \int_0^1 g(f(t))dt$