

Introduction à l'analyse fonctionnelle et ici à l'analyse de Fourier

1) Résultats géométriques déjà vus au H1 :

On note $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sin(n\cdot)$, $c_n = \cos(n\cdot)$.

On munit E du produit scalaire défini par $(f|g) = \int_0^{2\pi} f \cdot g$ (on ne demande pas de vérifier que c'est bien un p.s. sur E).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer les fonctions $(s_1, \dots, s_n, c_0, \dots, c_n)$ sont deux à deux orthogonales.

b) Soit $F_n = \text{Vect}(c_0, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$. Quelle est la dimension de F_n ?

c) Soit $f \in E$ et $\tilde{f}$ son projeté orthogonal sur F_n .

On peut donc écrire $\tilde{f}$ sous la forme $\tilde{f} = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\cdot) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\cdot)$: expliciter les a_k et les b_k comme des intégrales faisant intervenir f .

Les a_k et b_k sont appelés *coefficients de Fourier* de f .

Attention : la formule pour a_0 est légèrement différente de celle obtenue pour les a_k pour $k \geq 1$.

Une idée de l'analyse de Fourier est d'approximer une fonction (ici f) par $\tilde{f}$ C.L. des fonction sinus et cosinus : en physique de décomposer un signal complexe (p.ex. un son) comme une somme de fonctions très simples dont les pulsations sont les multiples (ou harmoniques) d'une pulsation fondamentale. Les coeff. devant les s_k et c_k donnent l'amplitude (et donc la contribution) relative de chaque harmonique.

La question qui se pose alors est : que se passe-t-il quand on fait tendre n vers l'infini ? Les séries $\sum a_k c_k$ et $\sum b_k s_k$ convergent-elles (et en quel sens, pour quelle norme ?). On sait qu'une C.N. de convergence d'une série est déjà que la suite de ses termes généraux tende vers zéro (sinon on a une divergence grossière). On va voir dans ce qui suit (§2) que cette condition est vérifiée. Puis au § 4, on aura les moyens d'en dire plus sur la convergence de cette série de fonctions.

2) Lemme de nullité à l'infini des coefficients de Fourier

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant, appelé, lemme de Riemann-Lebesgue :

$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, si on note : $I_n(f) := \int_a^b f(x) \cos(nx) dx$ on a $I_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dans le cas particulier où $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ on peut faire une preuve facile de ce résultat par I.P.P. : cf. DM 7. On va le montrer ici pour toute fonction f continue par morceau par un raisonnement de type "densité-continuité".

a) Montrer que le résultat est vrai si f est de la forme $\chi_{[\alpha, \beta]}$ pour $\alpha \leq \beta$ dans $[a, b]$, où $\chi_{[\alpha, \beta]}$ est la *fonction caractéristique* de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

b) En déduire que le résultat est vrai pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

c) En majorant simplement $|I_n(f) - I_n(\varphi)|$ en fonction de $\|f - \varphi\|_\infty$ en déduire que pour un $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telle que : $|I_n(f) - I_n(\varphi)| < \varepsilon$.

En déduire ensuite la conclusion pour $I_n(f)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Remarque – Noter bien le raisonnement en deux temps dans ce c), attention à bien garder des ε jusqu'à la fin, pour montrer correctement que $I_n(f) \rightarrow 0$.

3) Beaucoup de normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

On note $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$, et tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ on note $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$. On rappelle qu'on note aussi $\|f\|_\infty = \sup_{[a, b]} |f|$.

a) Pourquoi sait-on que $\|\cdot\|_2$ est une norme ?

- b) Démontrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
- c) Quel est le seul axiome non-évident pour montrer que les $\|\cdot\|_p$ sont des normes ? On admettra ce résultat ici.
- d) Montrer que si une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ c'est-à-dire si $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors (f_n) converge vers la même fonction f pour la norme $\|\cdot\|_2$ c'est-à-dire que $\|f - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- e) Montrer que si une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f pour la norme $\|\cdot\|_2$ c'est-à-dire si $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors (f_n) converge vers la même fonction f pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- f) On peut montrer que les réciproques des propriétés précédentes sont fausses.
Nous allons donner un exemple d'une suite de fonctions (f_n) qui converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour la norme infinie.

On considère pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 - nx, & \text{si } x \leq 1/n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- i) Dessiner le graphe de f_n .
- ii) Étudier la suite des $\|f_n\|_1$. Conclure sur la CV de la suite (f_n) pour la $\|\cdot\|_1$.
- iii) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) puis montrer que (f_n) ne converge pas pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.
- iv) Que fait la suite des $\|f_n\|_2$?

4) Conséquences du théorème de Weierstrass trigonométrique

On note $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'e.v. des fonctions continues 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit du p.s. défini pour tout $(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^{2\pi} fg$.

On reprend pour le reste les notations du §1. On note $F_n = \text{Vect}(c_0, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ qui est l'espace vectoriel des fonctions polynomiales trigonométriques de degré au plus n .

On appelle FPT = $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions polynomiales trigonométriques.

On admet le théorème d'approximation suivant :

Théorème (Weierstrass-trigonométrique) Pour toute fonction $f \in E = \mathcal{C}_{2\pi}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions polynomiales trigonométriques $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{FPT}^{\mathbb{N}}$ telle que (p_n) converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Reformulation : le s.e.v. FPT est *dense*¹ dans $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

- a) Montrer que FPT est *dense* dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$.
- b) Montrer que si une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ alors pour tout $g \in E$, $(f_n|g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (f|g)$.
- c) Montrer que si F est un sous-espace quelconque de E dense pour la $\|\cdot\|_2$, alors $F^{\perp} = \{0\}$.
- d) Soit $f \in E$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0$ et $\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
- e) Soit $f \in E$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n(f)$ le projeté orthogonal de f sur F_n . Montrer que $p_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Ainsi, on a démontré (moyennant il est vrai le théorème de Weierstrass trigonométrique, mais qui n'est pas si difficile que cela), que la série invoquée à la fin du § 1 converge au moins au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ vers f .

N.B. Il faut prendre garde que cette convergence pour la norme $\|\cdot\|_2$ n'entraîne pas forcément la convergence simple i.e. la convergence « point par point ».

1. Encore une lasagne crue, mais dense