

Fonctions définies par des intégrales.. avec le x dans l'intégrale

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}^{++}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

- Montrer que f est décroissante.
- Montrer que f est dérivable, calculer f' , et en déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$.
- Par un encadrement, donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et mieux, un équivalent simple de f en $+\infty$.
- Montrer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+x} dt$. Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Suites d'intégrales

Exercice 3. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis donner un D.A. à la précision $o(\frac{1}{n^2})$ de I_n .

Exercice 4. Soit $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(\theta) d\theta$.

- Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2} .
- Etudier la monotonie de (u_n) .
- Trouver un équivalent de (u_n) .

Sommes de Riemann

Exercice 5. Etudier la convergence des suites définies par : a) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^n k^2 \sin(\frac{k\pi}{n})$.

b) $b_n = \sin(\pi/n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos(k\pi/n)}$. c) $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{k^2 + n^2}$.

Exercice 6. Soit $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)}$. Déterminer un équivalent de (u_n) .

Exercice 7 (L'intégrale de Poisson, importante notamment en physique). Justifier que pour tout $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $I(t) = \int_0^{2\pi} \ln|t - e^{i\theta}| d\theta$ est bien définie. Calculer $I(t)$ avec des sommes de Riemann.

Exercice 8 (Méthode générale pour avoir un D.A. d'une somme de Riemann : pas avec hypothèse minimale). a) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$.

Que dire de $(S_n(f))$ quand $n \rightarrow +\infty$?

b) On suppose maintenant que $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ et on note $M_2 = \sup_{[0,1]} |f''|$.

(i) Montrer que $\forall k \in [[0, n-1]]$, $\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt - \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2} f'(\frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M_2}{6n^3}$.

(ii) On suppose que $f(1) \neq f(0)$. Déduire du (i), un équivalent simple de $S_n(f) - \int_0^1 f$ quand $n \rightarrow +\infty$.

c) Soit $\alpha \geq 1$. Appliquer ce qui précède pour obtenir un D.A. à deux termes significatifs de $u_n = 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$.