

Autour de l'uniforme continuité

Exercice 1 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité). a) Montrer que si f est U.C. sur I alors $\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}, \forall (y_n) \in I^{\mathbb{N}}, |x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Montrer que la réciproque est vraie

Exercice 2. Soit $(a, c) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est U.C. sur $]a, b]$ et $[b, c[$ alors elle est U.C. sur $]a, c[$.

Exercice 3. Montrer que toutes les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$ sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \cos(t^\alpha)$.

Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle U.C. sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Vrai ou faux : soit I un intervalle et $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective U.C. Sa réciproque f^{-1} est-elle toujours U.C. ?

Exercice 6 (Fonctions hölderiennes). Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\exists \lambda > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|^\alpha$.

a) Montrer que si $\alpha > 1$ alors f est constante.

b) Montrer que f est uniformément continue.

c) Retrouver avec le résultat du b) que si $\alpha \in]0, 1]$ $x \mapsto x^\alpha$ est U.C. sur $\mathbb{R}^+$.

Autour de la convergence uniforme

Exercice 7. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on définit $f_n(x) = n \cos^n(x) \sin(x)$.

a) Montrer que f_n converge simplement vers la fonction nulle.

b) Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} f_n$ et vérifier que (I_n) ne tend pas vers zéro.

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers zéro ? Justifier votre réponse de deux manières différentes.

Exercice 8 (Un théorème clef). a) Donner l'exemple d'une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ qui CVS vers une fonction *discontinue* en au moins deux points de $[0, 1]$.

b) Montrer que si $I \subset \mathbb{R}$ et si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge *uniformément* sur I vers une fonction f , alors f est continue.

Indication – Soit $\varepsilon > 0$. on coupe en trois..

Fonctions définies par une intégrale, où le x n'est pas dans les bornes

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On pose $I(x) = \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$. Montrer que I est continue sur $\mathbb{R}$, en montrant qu'elle est lipschitzienne.

Exercice 10 (Comment sortir le x de l'intégrale...). Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g définie par $g(x) = \int_a^b f(x+t) \sin(t) dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer g' .

Intégrale vue comme fonction de ses bornes

Exercice 11. Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$: variations, limites aux bornes, allure de la courbe.

Exercice 12. Montrer qu'il existe un unique $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\int_a^{3a} \frac{\cos(t)}{t} dt = 0$.

Exercice 13. Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Indication – on pourra écrire $\frac{\sin(t)}{t^2} = \frac{1}{t} + \alpha(t)$ où α est à préciser.