Vérifications de point de cours

Exercice 1. Faites les vérifications laissées en exercice en cours :

a) Si F_1 et F_2 sont dans $\mathbb{K}(X)$, on a $\deg(F_1+F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$.

b) La dérivation formelle des fractions rationnelles est bien définie i.e si $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ on a bien $\dfrac{A'B-AB'}{B^2} = \dfrac{C'D-CD'}{D^2}$.

Exercice 2. a) Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$, et $F \in \mathbb{K}(X)$ est une fraction non constante, alors $\deg(F') \leq \deg(F)-1$.

b) Donner un exemple de fraction F non constante telle que $\deg(F') \neq \deg(F)-1$

Pratique de la D.E.S.

Exercice 3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions :

$F_1 = \dfrac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$, $\quad F_2 = \dfrac{4X^3}{(X^2+1)^2}$ et pour F_2 *en déduire* sa D.E.S. dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions :

$F_1 = \dfrac{3}{X^3+1}$, $\quad F_2 = \dfrac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}$ $\quad F_3 = \dfrac{1}{X^{2n}-1}$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F = \dfrac{X^n-1}{X^{n+1}-1} \in \mathbb{C}(X)$.

La fraction F est-elle écrite sous forme irréductible ? Sinon, donner sa forme irréductible.

Fractions rationnelles et racines de polynômes : presque toujours via la ...

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et $x_1, \dots, x_n$ ses n racines (non nécessairement distinctes) de sorte que $P = \lambda(X-x_1)\dots(X-x_n)$.

Exprimer, à l'aide de P et de ses dérivées les sommes suivantes :

$S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-x_k}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-x_k)^2}$, $\quad S_3 = \displaystyle\sum_{i\neq j} \frac{1}{(X-x_i)(X-x_j)}$.

Exercice 7 (Calcul de sommes rationnelles symétriques des racines d'un polynôme)**.** a) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n admet n racines $a_1, \dots, a_n$ (non nécessairement distinctes), comment calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha - a_i}$ pour un $\alpha \in \mathbb{C}$ (distinct des a_i) ?

b) Soit $P = X^4-3X^2+5X-1$ de racines $a_1, \dots, a_4$, calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{a_i^4}{a_i^4-1}$.

Indication – Décomposer $F = \frac{X^4}{X^4-1}$ en éléments simples.

Exercice 8 (Quand $(P')^2 - PP''$ doit faire tilt)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$, de degré n. Montrer que $(P')^2 \geq PP''$ sur $\mathbb{R}$.

Application des fractions rationnelles à des calculs de déterminants

Exercice 9 (Déterminant de Cauchy : version détaillée de la méthode avec les fractions rationnelles)**.** On considère $\mathbb{K}$ un corps quelconque, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$ et on se propose de montrer que :

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} (a_i+b_j)}.$$

On note D_n le déterminant à calculer.

a) Justifier qu'il suffit de calculer D_n quand tous les a_i (resp. les b_j) sont deux à deux distincts. On suppose désormais cette condition réalisée.

b) On considère $F_n(X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{X+b_1} & \frac{1}{X+b_2} & \cdots & \frac{1}{X+b_n} \end{vmatrix}$.

Justifier que F_n est une fraction rationnelle de degré au plus -1.

c) Justifier qu'on peut écrire $F_n = \dfrac{P(X)}{(X+b_1)\dots(X+b_n)}$.

d) Déterminer une écriture scindée du polynôme P sans expliciter son coefficient dominant λ.

e) (i) Calculer la partie polaire de F_n relative au pôle $-b_n$ en fonction de D_{n-1}.

(ii) En déduire le calcul du coefficient dominant λ de F_n et en déduire enfin la relation de récurrence cherchée entre D_n et D_{n-1}.

Application des fractions rationnelles à des systèmes linéaires

Exercice 10. On considère $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets d'éléments d'un corps K. On suppose en outre $b_1,\dots,b_n$ deux à deux distincts.

On considère en outre un n-uplet $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{K}^n$. On cherche maintenant à résoudre le système suivant d'inconnues $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$.

$$(S)\left\{\begin{array}{l} \frac{x_1}{a_1+b_1}+\dots+\frac{x_n}{a_n+b_1}=c_1, \\ \vdots \\ \frac{x_1}{a_1+b_n}+\dots+\frac{x_n}{a_n+b_n}=c_n. \end{array}\right.$$

Pour $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, on considère la fraction $F=\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i+X}$. Exprimer F en fonction des polynômes de base de Lagrange pour les $(b_1,\dots,b_n)$. Une fois cette écriture de F obtenue, en déduire l'expression des x_i.

Application des fractions rationnelles à l'intégration : cf. B4, I2 mais aussi éventuellement parfois avec des sommes de Riemann

Exercice 11. a) Décomposer en éléments simples la fraction $u_n(x)=\frac{nx^{n-1}}{x^n-1}$.

b) Soit $z\in\mathbb{C}$ fixé, avec $|z|\neq 1$.

A l'aide de sommes de Riemann, calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{z-e^{it}}$.

N.B. Pour une fois, on va calculer cette intégrale sans passer en partie réelle/partie imaginaire !

c) Soit $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|\neq 1$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x-\cos(t)}{x^2-2x\cos(t)+1}dt$.

Enoncé et démonstration du théorème de D.E.S. sur un corps quelconque

Exercice 12. On va décomposer le théorème de D.E.S. (sur $\mathbb{K}$ qcq) en deux lemmes :

Dans ce qui suit, on a $F\in\mathbb{K}(X)$ avec $\deg(F)<0$.

Lemme 1 si $F=A/B\in\mathbb{K}(X)$ et $B=B_1\dots B_n$ est un produit de polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\exists!(A_1,\dots,A_n)\in\mathbb{K}[X]^n,\quad F=\sum_{i=1}^n\frac{A_i}{B_i},\quad \text{avec } \deg(A_i)<\deg(B_i).$$

Traduction du lemme pour $B_i=(X-x_i)^{\alpha_i}$: on a déjà séparé les pôles entre eux.

Lemme 2 si $F=A/P^\alpha$ avec P irréductible, alors :

$$\exists!(A_1,\dots,A_\alpha)\in\mathbb{K}[X],\quad F=\sum_{i=1}^n\frac{A_i}{P^i},\quad \text{avec } \forall\, i=1,\dots,\alpha,\ \deg(A_i)<\deg(P).$$

Traduction de ce lemme pour $P=(X-a)^\alpha$: le théorème de D.E.S. local en un pôle du cours.

a) Montrer d'abord le lemme 1 dans le cas $n=2$ autrement dit montrer que :

Si $F=\dfrac{A}{B_1B_2}$ avec $B_1\wedge B_2=1$, montrer qu'il existe A_1 et A_2 dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $F=\dfrac{A_1}{B_1}+\dfrac{A_2}{B_2}$ avec $\deg(A_1)<\deg(B_1)$ et $\deg(A_2)<\deg(B_2)$. Montrer aussi l'unicité de (A_1,A_2).

Indication – Bézout pour B_1,B_2, multiplier par A, mais pas les bons degrés, alors division euclidienne..

b) En déduire le lemme 1, pour n qcq, par réc. c) Montrer le lemme 2 par réc. sur n avec div. eucli.