

Les racines et leurs multiplicités

Exercice 1. Vrai ou faux (justifier et si faux, compléter l'énoncé pour en faire un énoncé vrai) :

- (i) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et a est une racine de multiplicité $\alpha > 1$ de P alors a est racine de multiplicité $\alpha - 1$ de P' .
- (ii) si $P \in \mathbb{C}[X]$ et a est une racine de multiplicité α de P' alors a est une racine de multiplicité $\alpha + 1$ de P .

Exercice 2. a) Soit $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$. Déterminer $P \wedge P'$.

- b) En remarquant que 2 est racine de $P \wedge P'$ obtenir une écriture scindée de $P \wedge P'$. En déduire toutes les racines de P avec leur multiplicité.

Exercice 3. Soit $n \geq 3$. Montrer que le polynôme $P = X^n + nX + 1$ n'admet pas de racines doubles dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4. On pose $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

Calculer $P(j)$ en déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. Trouver tous les $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tels que $(X - 1)^4 | P + 1$ et $(X + 1)^4 | P - 1$.

Exercice 6. a) Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P' | P$.

Indication – Une méthode est de se ramener à une E.D. Une autre est induite par la question suivante, plus générale.

- b) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe p, q dans $\mathbb{N}^*$ tels que : $(P')^p$ divise P^q .

Indication – Cette fois comparer les racines de P' et celles de P .

Le lien coefficients/racines

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, de degré n . On suppose que toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ vérifient $|z| < 1$. Montrer que $P = X^n$.

Exercice 8. Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 1$ de racines complexes $z_1, \dots, z_5$.

Calculer $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} z_i^2 z_j$.

Bonus (ne sera pas corrigé en classe) : le résultant et le discriminant

Exercice 9 (Définition et prop. fond. du résultant). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Définition : On appelle *matrice de Sylvester* de P et Q , et on notera $S(P, Q)$ la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_{m+n-1}[X]$ du système de vecteurs :

$$(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) \quad (\dagger)$$

a) Le but de cette question est de montrer que $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si, $S(P, Q)$ est inversible. Par définition le déterminant $\det(S(P, Q))$ s'appelle le *résultant* de P et Q , et est noté $R(P, Q)$.

(i) Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes non nuls. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg(U) < \deg(Q)$ et $\deg(V) < \deg(P)$ et $PU + QV = 0$.

(ii) Déduire du (i) le résultat annoncé à savoir que la famille $(\dagger)$ est libre si, et seulement si, $P \wedge Q = 1$.

(iii) Calculer $R(P, Q)$ si P et Q sont deux polynômes de degré un.

(iv) Calculer $R(P, Q)$ si P est un polynôme quelconque et Q est un polynôme de degré un.

b) Application au discriminant : si $P \in K[X]$, on appelle *discriminant* de P le nombre : $\Delta(P) = R(P, P')$.

(i) Quelle propriété est-elle caractérisée par l'égalité $\Delta(P) \neq 0$?

(ii) Calculer $\Delta(P)$ si $P = aX^2 + bX + c$ et si $P = X^3 + aX + b$.