Restes de division euclidiennes

Exercice 1 (Reste de la division par un polynôme scindé : indispensable !). a) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient a, b dans $\mathbb{K}$ avec $a \neq b$. Soient λ et μ les restes de la division euclidienne de P par $X - a$ et $X - b$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = X^{4n} + 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de A par $B = X^2 - 1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = (X \sin(\alpha) + \cos(\alpha))^n$. Calculer le reste de la division euclidienne de A par $B = X^2 + 1$.

d) Expliciter le reste de la division euclidienne de $(X + \sqrt{3})^{17}$ par $X^2 + 1$.

e) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

f) Calculer le reste de la division euclidienne de $X^4 + 7X^3 - X^2 + 2X - 1$ par $(X - 1)^2$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(i) Vérifier qu'en notant $P = X^2 - 4X + 4$ on a $P(A) = 0$.

(ii) En utilisant le reste de la division euclidienne de X^n par P, expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Décompositions en polynômes irréductibles

Exercice 3. Décomposer en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 4. a) Justifier que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n + Y^n = \displaystyle\prod_{\omega \in R_n(-1)} (X - \omega Y)$ où $R_n(-1)$ est l'ensemble des racines n-ièmes de -1 dans $\mathbb{C}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f(X) = (X + 2)^n + X^n$. Donner si n est pair, la forme explicite de la décomposition en irréductible f dans $\mathbb{R}[X]$.

On trouvera une expression de la forme : $f(X) = 2 \displaystyle\prod_{k=0}^{n/2-1} (X^2 + 2X + b_k)$ avec $b_k \in \mathbb{R}$, $|b_k| > 1$.

Exercice 5 (Un grand classique). a) Soit $\mathcal{A} = \{P \in \mathbb{R}[X], \exists\, (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par $\times$.

Indication – Utiliser une identité qu'on voit bien avec les nombres complexes.

b) Il est clair que $\forall\, P \in \mathcal{A}$, P est à valeurs positives, i.e. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. On demande ici de montrer que la réciproque est vraie.

Indication – Penser à décomposer P en irréductibles sur $\mathbb{R}$.

PGCD

Exercice 6. Calculer le pgcd de $X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$.

Exercice 7. a) Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ dans $\mathbb{K}[X]$, en fonction du quotient et du reste de la division euclidienne de a par b.

b) En déduire le pgcd de ces deux polynômes.

c) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ avec $d > c$ et $b > a$. CNS pour que $X^b - X^a$ divise $X^d - X^c$?

Irréductibilité sur $\mathbb{Q}$: raisonnements d'arithmétique sur les entiers

Exercice 8. Montrer que le polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 9. Soient a, b, c dans $\mathbb{Z}$ tous impairs. Montrer que $P = aX^3 + bX + c$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 10 (ENS 2018).

Soit $f = X^4 - 2X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Décomposer f en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$.

b) Pour tout nombre premier p, décomposer f en irréductible dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.