Exercice 1. On effectue une suite de n lancers d'une pièce équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur strictement à 4%, que la fréquence des piles obtenus diffère de 1/2 de strictement moins de 3%.

Exercice 2.

On considère une v.a. X dont la loi est donnée dans le tableau ci-contre

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

.

On pose $Y = |X|$. a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Polynômes et proba : fonctions génératrices

Exercice 3 (Propriétés générales des fonctions génératrices : résultats de cours)**.** Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a. à valeurs entières. Soit $G_X(T) = \sum_{k=0}^{N} P(X=k)T^k$ sa fonction génératrice (où $N = \max(X(\Omega))$).

a) Exprimer les dérivées $G'_X(1)$, $G''_X(1)$ en terme de $E(X)$, et de $V(X)$.

b) Si X et Y sont indépendantes, comparer G_{X+Y} avec G_X et G_Y.

c) Retrouver ainsi le calcul de la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (c'est une *troisième méthode* pour calculer cette variance).

Exercice 4 (Seconde méthode pour le problème du nombre de records, avec les fonctions génératrices)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Omega = S_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. On munit Ω de la probabilité uniforme. Pour $\sigma \in \Omega$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on dit que $\sigma(i)$ est un maximum provisoire si $\sigma(i) = \max(\sigma(1),\dots,\sigma(i))$. Pour $\sigma \in S_n$, on note $X_n(\sigma)$ le nombre de maxima provisoires de σ (qui est aussi le nombre de réaffectation dans l'algo. de calcul du max).

On note $C(n,k) = \mathrm{Card}\{\sigma \in S_n,\ X_n(\sigma) = k\}$ de sorte que $P(X_n(\sigma) = k) = \dfrac{C(n,k)}{n!}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et $k \in [\![1,n-1]\!]$,

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)C(n-1,k)$$

Indication – On pourra raisonner sur la valeur de $\sigma(n-1)$. Même si vous êtes bloqué(e)s par cette question de dénombrement un peu fine, ne vous privez pas du plaisir d'appliquer cette formule pour finir l'exercice.

b) Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $P_n(T) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)T^k = \sum_{k=1}^{n} C(n,k)T^k$.

Montrer que $P_n(T) = \prod_{k=0}^{n-1}(T+k)$

c) En déduire alors l'espérance et la variance de X_n.

N.B. On a déjà vu une autre méthode, plus simple pour $E(X_n)$ avec la décomposition de X_n en indicatrices en commentaire de l'ex. sur la probabilité d'un record.

Exercice 5 (Dés de Sichermann)**.** Le but de cet exercice est de montrer qu'il est possible de fabriquer une paire de dés cubiques, équilibrés, qui ne sont pas les dés cubiques ordinaires, permettant de retrouver en les lançant exactement la même loi pour la somme $S = X_1 + X_2$ des valeurs des deux dés, indépendants.

On se donne les règles de construction suivantes :

- les chiffres figurant sur chaque face sont non nuls,
- les chiffres ne sont pas forcément entre 1 et 6,
- on peut y répéter le même chiffre sur deux faces différentes.

Les deux dés de la paire ne sont pas forcément les mêmes.

Comparer à l'exercice d'olympiade académique de 1ere :
`http://mathematiques.ac-montpellier.fr/IMG/pdf/Olympiades_2012_Sujet_S.pdf`

Autres applications des polynômes à des « formules »

Exercice 6 (Révision)**.** Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$ avec la même méthode qu'on avait calculé $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 7 (Révision...)**.** Calculer : $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

Exercice 8. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. On veut généraliser un résultat déjà vu en arithmétique et montrer que : si $s \in \mathbb{N}^*$, p divise tous les tous les $\binom{p^s}{k}$ pour $k = 1,\dots,p^s - 1$.

(i) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(P+Q)^p = P^p + Q^p$.

(ii) En déduire par récurrence que $(1+X)^{p^s} = 1 + X^{p^s}$, puis le résultat demandé.

N.B. On peut aussi faire une dém. de ce résultat sans utiliser des polynômes... c'est un peu plus difficile...

Solution 1 Soit X la v.a. donnant le nombre de piles obtenu au bout de n lancers. On sait que $X \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$. La fréquence cherchée est $F = X/n$. Bien sûr $E(F) = E(X)/n = 1/2$. La question de l'énoncé, traduite en langage plus mathématique, est donc la suivante : déterminer n tel que :

$$P(|F - E(F)| < 0.03) > 1 - 0.04 \quad (\dagger)$$

En considérant l'événement complémentaire, l'inégalité $(\dagger)$ ci-dessus est équivalente à :

$$P(|F - E(F)| \geq 0,03)) < 0.04 \quad (\ddagger)$$

Or le premier membre de $(\ddagger)$ est celui qui apparaît naturellement dans l'inégalité de Tchebychev qui dit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|F - E(F)| \geq \varepsilon) < \frac{V(F)}{\varepsilon^2}.$$

Avec $\varepsilon = 0.03$ une C.S pour avoir $(\ddagger)$ est donc d'avoir :

$$\frac{V(F)}{\varepsilon^2} < \alpha \quad (*)$$

pour $\alpha = 0.04$.

Mais $V(F) = \dfrac{V(X)}{n^2}$ et $V(X) = np(1-p) = \dfrac{n}{4}$ ici avec $p = 1/2$ (loi binomiale).

Donc $(*)$ est équivalente à :

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} < \alpha$$

autrement dit :

$$n > \frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}$$

Application numérique : on trouve $n > 6944.4444...$, donc on prend $n = 6945$.

Solution 2 a) Les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple on voit bien que l'événement $Y = 0$ et l'événement $X = 0$ sont le même événement. Ainsi $P(Y = 0) = P(X = 0) = \dfrac{1}{6}$ et donc $P(Y = 0).P(X = 1) \neq 0$ alors que $P((Y = 0) \cap (X = 1)) = 0$ car les événements sont incompatibles.

b) On veut calculer $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. On $E(X) = 0$ par la symétrie du tableau. La même symétrie du tableau des valeurs de $XY = X|X|$ donne que $E(XY) = 0$.

Donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Solution 3 a) D'abord remarquons que $G_X(1) = \sum_{k=0}^{N} P(X = k) = 1$ même si cela n'était pas demandé.

Ensuite $G'_X(T) = \sum_{k=1}^{N} kP(X = k)T^{k-1}$ et donc $G'_X(1) = \sum_{k=1}^{N} kP(X = k) = E(X)$.

Ensuite encore $G''_X(T) = \sum_{k=2}^{N} k(k-1)P(X = k)T^{k-2}$.

Donc $G''_X(1) = \sum_{k=2}^{N} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=2}^{N} k^2 P(X = k) - \sum_{k=2}^{N} kP(X = k)$.

On peut rajouter les termes d'indices $k = 1$ aux deux sommes sans changer leur différence, donc :
$G''_X(1) = E(X^2) - E(X)$

Cela permet bien sûr de calculer la variance $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Conseil : *retenir les deux formules*

$$\boxed{G'_X(1) = E(X) \text{ et } G''_X(1) = E(X^2) - E(X).}$$

b) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $G_X(T) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} T^k$.

Donc $\boxed{G_X(T) = (pT + (1-p))^n}$ (une nouvelle façon de coder la loi binomiale, par un polynôme).

Alors $G'_X(T) = np(pT + (1-p))^{n-1}$ et $G'_X(1) = np(1)^{n-1} = np = E(X)$ (nouvelle façon de calculer cette espérance).

De même (pour $n \geq 2$), $G''_X(T) = n(n-1)p^2(pT + (1-p))^{n-2}$ et donc $G''_X(1) = n(n-1)p^2$.

On en déduit facilement $E(X^2) = G''_X(1) + E(X)$ et puis $V(X) = np(1-p)$.

Solution 4

Solution 5 Ici : Considérons X_1 représentant le lancé du premier dé et X_2 celui du second dé, on considère $X = X_1 + X_2$.

On sait que $G_{X_1} = G_{X_2} = \frac{1}{6}(T + T^2 + \cdots + T^6)$ Donc $G_X = \frac{1}{36}(T + T^2 + \cdots + T^6)^2$.

On cherche deux autres var. aléatoires Y_1, Y_2 tels que $G_{Y_1}.G_{Y_2} = G_X$.

Pour cela on cherche une décomposition du polynôme $36G_X$ en un produit $P.Q$ de deux polynômes à coefficients *positifs* tels que, pour chaque polynôme, la somme de tous les coefficients fasse 6 : en effet $\sum_k P(Y_1 = k) = 1$ et de même pour Y_2 (loi de probabilité).

Or la somme des coefficients pour un polynôme P est simplement la valeur $\widetilde{P}(1)$. On veut donc que $\widetilde{P}(1) = \widetilde{Q}(1) = 6$.

Or $6G_{X_1} = T(T + 1)(T^2 + T + 1)(T^2 - T + 1)$ (D.P.I. dans $\mathbb{Z}[T]$).

Donc $36G_X = T^2(T + 1)^2(T^2 + T + 1)^2(T^2 - T + 1)^2$.

• A cause de la contrainte qu'aucun des deux dés ne doit avoir de face avec un 0, chacun des polynômes P et Q cherché admet un T en facteur.

• Comme $\widetilde{T+1}(1) = 2$ et $\widetilde{T^2+T+1}(1) = 3$ et $\widetilde{T^2-T+1}(1) = 1$ et qu'on veut que $\widetilde{P}(1) = \widetilde{Q}(1) = 6$, on est sûr que P et Q ont chacun un facteur $(T + 1)$ et un facteur $(T^2 + T + 1)$.

Ainsi on sait déjà que $P = T(T+1)(T^2+T+1)P_1$ et $Q = T(T+1)(T^2+T+1)Q_1$ avec $P_1Q_1 = (T^2-T+1)^2$.

Le cas où $P_1 = Q_1 = T^2 - T + 1$ est celui des dés ordinaires.

On n'a pas encore traduit le caractère équilibré des deux dés : Dire qu'ils le sont signifie que chaque face a proba. 1/6 donc que les coeff. des polynômes $6G_{Y_i}$ sont pour chaque T^k le nombre de faces du dé i qui porte le numéro k. Donc ces coeff. doivent être *entiers* donc $6G_{Y_i}$ doit être à coeff. entier. et comme le produit PQ est unitaire, chaque polynôme P et Q doit être unitaire.

Il ne reste donc plus que la possibilité $P_1 = (T^2 - T + 1)^2$ et $Q_1 = 1$.

On obtient donc $P = T(T + 1)(T^2 + T + 1)(T^2 - T + 1)^2 = (T^8 + T^6 + T^5 + T^4 + T^3 + T)$ et $Q = T(T + 1)(T^2 + T + 1) = (T^4 + 2T^3 + 2T^2 + T)$.

Remarque : en fait, l'exercice doit aussi permettre de conclure sur ce qui se passe dans le cas pipé, où les coeff. ne seraient pas a priori entier, mais par unicité de la D.P.I., il y aurait seulement un facteur multiplicatif devant..

Solution 6 a) Notons $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

Cette écriture fait apparaître c_n comme le produit de Cauchy $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ où $a_k = b_k = \binom{n}{k}$.

Donc c_n est le coefficient de X^n dans le produit AB où $A = B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$.

Mais par la formule du binôme $A = (1 + X)^n$. Donc $AB = (1 + X)^{2n}$.

Et donc par la formule du binôme en sens inverse, $c_n = \binom{2n}{n}$.

D'où : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b) Soit $S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} ((-1)^k \binom{n}{k})\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Ceci est un produit de Cauchy, donc le coeff. de X^n dans AB où $A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} X^k = (1 - X)^n$ et $B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k = (1 + X)^n$.

Donc S est le coeff. de X^n dans $((1 - X)(1 + X))^n = (1 - X^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{2k}$ est nul si n est impair, et si n est pair ce coefficient est $\binom{n}{n/2}(-1)^{n/2}$.

Donc $S = \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ est impair,} \\ \binom{n}{n/2}(-1)^{n/2} \text{ sinon} \end{cases}$.

Solution 7 Même chose qu'un exercice d'une planche du chap. C sauf qu'on y avait : $\prod_{k=0}^{n-1}(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$. La grande idée y était de remplacer 1 par X. Donc si on note A le produit de l'énoncé $A = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1}(-1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = (-1)^n P(-1)$ où $P(z) = z^n - 1$.

Solution 8 (i) Par la formule du binôme de Newton (valable dans tout anneau commutatif),

$(P + Q)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} P^{p-k} Q^k$.

Mais les coefficients étant vu dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il faut comprendre que les coefficients sont $\binom{p}{k}.\bar{1}$ où $\bar{1}$ est l'unité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les classes de $\binom{p}{k}$ modulo p et on a montré que $p|\binom{p}{k}$ pour $k \in [[1, p-1]]$.

Donc $\binom{p}{k}\bar{1} = \bar{0}$ et $(P+Q)^p = P^p + Q^p$.

(ii) Montrons alors par récurrence sur s l'égalité $(1+X)^{p^s} = 1 + X^{p^s}$.

L'égalité est triviale si $s = 0$: $1 + X = 1 + X$.

H.R. Supposons qu'on a pour un $s \geq 0$ donné, $(1+X)^{p^s} = 1 + X^{p^s}$.

Alors $(1+X)^{p^{s+1}} = ((1+X)^{p^s})^p = (1 + X^{p^s})^p$ par l'H.R.

On applique alors le (i) avec $P = 1$ et $Q = X^{p^s}$ et on obtient bien que $(1+X)^{p^{s+1}} = 1 + X^{p^{s+1}}$. La réc. est établie.

(iii) La formule du binôme donne $(1+X)^{p^s} = \sum_{k=0}^{p^s} \binom{p^s}{k} X^k$ donc en comparant avec le (ii), on voit que tous les $\binom{p^s}{k}$ sont nuls dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $k = 1, \ldots, p^s - 1$.

Remarque – Preuve sans utiliser les polynômes.

On a montré que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq k \leq n$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Ici donc on a $k\binom{p^s}{k} = p^s\binom{p^s-1}{k-1}$.

Donc $v_p(k) + v_p(\binom{p^s}{k}) = v_p(p^s) + v_p(\binom{p^s-1}{k-1})$.

Comme $v_p(p^s) = s$ le membre de droite est supérieur ou égal à s.

Or pour $k \in [[1, p^s - 1]]$, $v_p(k) \leq s - 1$. (car p^s ne divise pas k).

Donc $v_p(\binom{p^s}{k}) \geq 1$. □

Complément plus difficile : on peut regarder le même problème modulo p^2.