

Chapitre I1 : construction de l'intégrale des fonctions C.P.M.

Alors, d'abord : que veut-on dire avec $\int_a^b f(x)dx$?¹
Riemann, 1854.

I Préliminaire (complément au chap. F1) : Fonctions uniformément continues
1) Définition :

a) **Rappel :** soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue sur I ssi f est continue en tout point de x_0 de I donc :

$$f \text{ cont. sur } I \text{ ssi } [\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

b) **Nouveau :** on définit la notion de fonction *uniformément continue* sur I (on notera U.C. sur I), par :

(i) f U.C. sur I ssi $[\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x_0 \in I, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$

Question : Quelle est la différence entre les propriétés du a) et du b) (i) ?

(ii) Comme dans la déf. du (i) le x_0 et le x jouent le même rôle on notera plutôt :

$$f \text{ U.C. sur } I \text{ ssi } [\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

c) Comparaison entre les deux déf. :

- dans le cas du b), le α ne dépend pas de x et y , seulement de ε , on parlera d'un α uniforme.
- toute fonction U.C. sur I est continue sur I , on va voir des contre-exemples pour la réciproque.

2) Exemple de fonctions U.C. :

a) On connaît déjà des fonctions pour lesquelles, si on connaît l'écart entre x et y , on peut majorer l'écart entre $f(x)$ et $f(y)$: les fonctions lipschitziennes.

Propriété : Toute fonction lipschitzienne est U.C.

b) Retenir les implications logiques entre les trois propriétés

3) Vision séquentielle de l'U.C. :

a) Prop. $f \text{ U.C. sur } I \Rightarrow [\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}, \forall (y_n) \in I^{\mathbb{N}}, |x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0]$

Remarque : on peut montrer (exercice) que la récip. est vraie.

b) Appl. $f : x \mapsto x^2$ n'est pas U.C. sur $\mathbb{R}^+$, ce qui donne un exple de fct continue non U.C.

c) Exercice : si f est U.C. sur $\mathbb{R}^+$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x)$.

Donc pour l'U.C. donne une forte contrainte à l'infini, en revanche sur les segments, on a :

4) Cas des fonctions continues sur un segment

a) Thm. (Heine) si f fonction continue sur un segment $[a, b]$ alors f est U.C. sur $[a, b]$.

b) Remarque : ainsi, par exemple, $\sqrt{\cdot}$ sur $[0, 1]$ est U.C. non lip.

c) Preuve du a) : idée connue : par l'absurde pour construire des suites et B.W.

II Fonctions continues par morceaux, approximation par les fonctions en escalier
1) Subdivisions d'un segment :

a) Déf. : une *subdivision* σ d'un segment $[a, b]$ est un sous-ensemble fini $\sigma := \{c_0 = a < c_1 < \dots < c_n = b\}$ de $[a, b]$

1. Also zuerst : Was hat man unter $\int_a^b f(x)dx$ zu verstehen ?

Terminologie : les pas de la subdivision entre c_{i-1} et c_i est $p_i = c_i - c_{i-1}$. Parfois, on appelle pas de la subdivision $p = \max(p_i)$.

Exemple le plus important : une subdivision est dite régulière ssi elle est à “pas constant” au sens des p_i constants : le pas de la subdivision est alors $p = \frac{b-a}{n}$ et on a alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, c_i = a + i \frac{b-a}{n}.$$

En NUMPY, on l’obtient avec `np.linspace(a,b,n+1)` où le `n+1` signifie que la subdivision comprend $n+1$ points.

b) Comparaison de subdivisions :

Déf. une subdivision σ' est dite *plus fine* qu’une subdivision σ ssi σ' contient σ . (Elle est plus fine au sens où les pas sont plus petits, mais elle contient plus de points!).

2) Fonctions continues par morceaux

a) Déf. (i) $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une subdivision $\sigma = \{c_0 = a < \dots < c_n = b\}$ telle que :

- $f|_{[c_{i-1}, c_i]}$ est continue et
- en notant $f_i = f|_{[c_{i-1}, c_i]}$, chaque fonction f_i se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{f}_i$ sur $[c_{i-1}, c_i]$.

(ii) Caract. équivalente : $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une subdivision $\sigma = \{c_0 = a < \dots < c_n = b\}$ telle que : $f|_{[c_{i-1}, c_i]}$ est continue et f admet une limite finie à gauche et à droite en chaque c_i (et à droite en c_0 , à gauche en c_n).

Term. Une telle subdivision σ , qui contient donc tous les points de discontinuité de f , est dite *adaptée* à f .

(iii) Caract. $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ si, et seulement si, f admet un nombre *fini* de points de discontinuité, tous de première espèce.

b) Propriétés :

- (i) Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ alors f est bornée (*dém.*).
- (ii) $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

3) Des fonctions CPM particulières : les fonctions en escalier

a) Déf. : f constante sur les intervalles ouverts, les $f(c_i)$ peuvent être choisis librement.

b) Structure :

- (i) L’ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions en escalier est une $\mathbb{R}$ -algèbre.
- (ii) Deux familles génératrices pour la structure d’e.v. :
 - les $\chi_{[c,d]}$ avec les $\chi_{\{e\}}$ pour tout $(c, d, e) \in [a, b]^3$ (facile),
 - les $\chi_{[c,d]}$ pour $(c, d) \in [a, b]^2$ (laissé en exercice). Le cas $c = d$ est inclus.

Ces familles ne sont pas libres.

4) Norme infinie, CV Uniforme

a) Norme infinie N_∞

(i) Déf. $\forall f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. : $\|f\|_\infty := \sup_{[a,b]} |f|$

(ii) Déf. axiomatique d’une norme : si E est un $\mathbb{R}$ -e.v., une *norme* sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois axiomes :

(iii) Prop. (*savoir dém. soigneuse sur les sup.*) l’application $\|\cdot\|_\infty$ du (i) est une norme sur $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

(iv) Distance associée : $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$.

b) CV Uniforme

(i) Déf. de $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$ pour $\|\cdot\|_\infty$ par : $\|f_n - g\|_\infty \rightarrow 0$.

On dit que la suite de fonction (f_n) *CV Uniformément* (CVU) vers g .

(ii) Exemple de $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1/2]$.

c) Notion de CV Simple (CVS) :

(i) Par déf. (f_n) converge *simplement* sur $[a, b]$ vers g , ssi $\forall x_0 \in [a, b], f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x_0)$.

(ii) Exemple de la convergence simple de la suite (f_n) où pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$.

(d) Lien CVS/CVU

(i) Prop. Si (f_n) CVU vers g alors (f_n) CVS vers g

(ii) Contre-exemple pour la récip. : l'exemple des (f_n) , avec $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$.

5) Le théorème d'approximation uniforme par les fonctions en escalier

(a) Cas des fonctions continues :

Thm. (dém.) Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})^2$, $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi < \varepsilon$.

(b) Même résultat pour les fonctions $\mathcal{CM}$ (avec le a) sur chaque segment d'une subd. adaptée).

c) Interprétation du théorème d'approximation en terme de limites

Cor. du thm d'approx. : toute fonction CPM est limite uniforme de fonctions en escaliers.

Ou encore $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est *dense* dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ pour la $\|\cdot\|_\infty$.

III Construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

1) Intégrale des fonctions en escalier

a) Définition :

(i) Déf. à partir de la plus petite subdivision adaptée :

Déf. Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $\sigma_0 = \{a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b\}$ la plus petite subdivision de $[a, b]$ adaptée à f . On note λ_i la valeur de f sur chaque $]c_i, c_{i+1}[$.

On définit alors $\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (c_{i+1} - c_i)$.

N.B. Cette intégrale est une somme d'aire de rectangles, avec signes.

(ii) *Invariance par passage à une subdivision plus fine :*

Prop. Pour toute subdivision σ adaptée à $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, si on note $\sigma = \{a = c'_0 < c'_1 < \dots < c'_m = b\}$ et μ_j la valeur de f sur chaque $]c'_j, c'_{j+1}[$, on a aussi :

$$\int_a^b f = \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j (c'_{j+1} - c'_j).$$

Ainsi la formule du (i) est valable pour *toute* subdivision adaptée.

(iii) **Deux notations :** $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$, le x variable muette

b) Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier (savoir dém. : subdivisions)

(i) *Forme linéaire :* $I : \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est une *forme linéaire*.

(ii) *Positivité :* $\forall f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ si $f \geq 0$ (p.p.) alors $\int_a^b f \geq 0$.

(iii) *Positive + linéaire entraîne croissante :*

$\forall f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ si $f \leq g$ (p.p.) alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(iv) *Inégalité Triangulaire intégrale :* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

(v) Relation de Chasles, et notation généralisée : $\int_b^a f := -\int_a^b f$ pour généraliser Chasles.

N.B. – Tous les résultats sur les inégalités ne sont valables que si $a \leq b$!

2) Intégrale des fonctions $\mathcal{CM}$

a) Théorème-déf. Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et si $E_-(f) := \{\int_a^b \varphi, \varphi \in \mathcal{E}, \varphi \leq f\}$ et $E_+(f) := \{\int_a^b \psi, \psi \in \mathcal{E}, f \leq \psi\}$ alors $\sup E_-(f) = \inf E_+(f)$ et on définit $\int_a^b f$ comme cette valeur commune.

Interprétation en terme d' "aire".

Remarque : si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, pour montrer l'égalité $\sup A = \inf B$, il suffit de montrer les deux propriétés suivantes :

- $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b,$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in A \times B, 0 \leq b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon.$

On dit aussi, pour dire que $\sup A = \inf B$ que les ensembles A et B sont *adjacents*.

Preuve du théorème : Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Notons $\mathcal{E}_-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}, \varphi \leq f\}$ et $\mathcal{E}_+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}, \psi \geq f\}$.

• Pour tout couple $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}_-(f) \times \mathcal{E}_+(f)$, on a $\varphi \leq f \leq \psi$, en part. $\varphi \leq \psi$ et par propriété de l'intégrale des fonctions en escalier, on en déduit $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$.

Ceci montre que pour tout couple $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{E}_-(f) \times \mathcal{E}_+(f)$, on a $\Phi \leq \Psi$ (1).

• Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'approximation uniforme, on sait qu'il existe un couple $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}_-(f) \times \mathcal{E}_+(f)$ tel que $\psi - \varphi < \varepsilon' = \varepsilon/(b-a)$.

Par prop. de l'intégrale des fonctions en escalier, on en déduit que $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon'(b-a)$ (croissance) et donc (linéarité), $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \varepsilon$.

Donc on a bien montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists (\Phi, \Psi) \in \mathcal{E}_-(f) \times \mathcal{E}_+(f)$ tel que $0 \leq \Psi - \Phi \leq \varepsilon$ (2).

Avec (1) et (2), on a bien montré que les deux ensembles sont adjacents. $\square$

b) Interprétation de l'intégrale comme une limite :

Propriété : Soient $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $(\varphi_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ qui CV uniformément vers f , alors :

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n$$

N.B. – Intérêt de la déf. du a) : indép. du choix de la suite (φ_n) .

Preuve : N.B. Cette preuve est un peu lourde, parce qu'on n'a pas encore établi les prop. (linéarité, croissance, de l'intégrale des fonctions C.P.M. Elles seront établies au c) et, pour la linéarité, on se servira justement de ce résultat du b) ! En revanche, quand on a ces résultats, on peut aller beaucoup plus vite, cf. 2.d)

Soit donc (φ_n) comme dans l'énoncé. Notons $M_n = \|f - \varphi_n\|_\infty$.

On sait donc que $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on veut montrer que $|\int_a^b f - \int_a^b \varphi_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or avec les inégalités $-M_n \leq f - \varphi_n \leq M_n$ qu'on peut réécrire : $-M_n + \varphi_n \leq f \leq M_n + \varphi_n$, on dispose d'un encadrement de f par deux fonctions en escaliers à savoir $-M_n + \varphi_n$ d'un côté et $M_n + \varphi_n$ de l'autre.

Par la définition de l'intégrale donnée au a), on sait alors que $\int_a^b f$ vérifie :

$$\int_a^b (-M_n + \varphi_n) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b (M_n + \varphi_n).$$

Or les deux membres extrêmes de cette inégalité sont des intégrales de fonctions en escalier, donc par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, on obtient :

$$-(b-a)M_n + \int_a^b \varphi_n \leq \int_a^b f \leq M_n(b-a) + \int_a^b \varphi_n,$$

et finalement :

$$-(b-a)M_n \leq \int_a^b f - \int_a^b \varphi_n \leq (b-a)M_n,$$

ce qui, par théorème des gendarmes, montre la conclusion. $\square$

c) Prop. fondamentales de $\int_a^b f$: les mêmes qu'au 1) b) (i) $\rightarrow$ (v).

(i) *Forme linéaire* : $I : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire.

(ii) *Positivité* : $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ si $f \geq 0$ (p.p.) alors $\int_a^b f \geq 0$.

(iii) *Positive + linéaire entraîne croissante* :

$\forall f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ si $f \leq g$ (p.p) alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(iv) Inégalité Triangulaire intégrale : $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

(v) Relation de Chasles, et notation généralisée : $\int_b^a f := -\int_a^b f$ pour généraliser Chasles.

Méthode importante pour prouver la linéarité et Chasles : Extension par continuité et densité.

Exemple plus élémentaire de ce principe déjà rencontré :

Si deux fonctions f et g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ coïncident sur une partie A dense dans $\mathbb{R}$ alors elles coïncident partout.

Ici on le généralise à des applications définies sur un espace de fonctions qui coïncident sur une partie dense : $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

d) Théorème sur l'intégration d'une limite uniforme :

Théorème : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, alors :

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

Retenir la preuve très rapide, bcp + simple qu'au 2.b) .

3) (Très brève) Extension aux fonctions à valeurs complexes ou à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

a) Même déf. pour $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{R}^n$) et caract. par les composantes $f_i \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})^2$.

b) Déf. de $\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$ si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$

respectivement : $\int_a^b f = (\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n) \in \mathbb{R}^n$ si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}^n)$.

c) Prop. évidentes : $\mathbb{R}$ -linéarité, relation de Chasles.

d) Prop. : $\mathbb{C}$ -linéarité : $\forall (f, g) \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

e) Prop. I.T.I. pour le module ou une norme quelconque :

(i) Ce qu'on pourrait montrer en "reprenant" la construction de l'intégrale pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (la bonne méthode !) : Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ alors $\|\int_a^b f\| \leq \int_a^b \|f\|$.

En part. pour les fonctions à valeurs complexes : $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ (†)

(ii) Astuce (*) pour prouver (†) en se ramenant au cas réel : mult. par $e^{-i\theta}$ où $\theta = \arg(\int_a^b f)$.

IV Cas particulier de l'intégrale d'une fonction continue

1) L'existence de primitives enfin démontrée

a) Théorème fondamental sur le lien intégrale/primitive (version 1) : si f continue alors F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $F' = f$

Retenir la dém. – Intérêt de "rentre" le $f(x_0)$ sous l'intégrale, pour majorer ensuite l'intégrale.

b) N.B. Si f est C.P.M. non continue alors $F(x) = \int_a^x f$ est bien définie, mais n'est pas une primitive de f .

Ex. planche : les seules fonctions C.P.M. ayant des primitives sont les fonctions continues.

Les notions de fonctions *intégrables* et de fonctions *ayant des primitives* sont donc bien distinctes.

c) Forme de l'ensemble des primitives de f : $F_0 + c$ où $c \in \mathbb{R}$ (cf. chap. B1).

d) Conséquence :

Théorème fondamental sur le lien intégrale/primitive, version 2 : Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et F est une primitive de f , alors :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

2) Exemples d'étude d'intégrales comme fonctions des bornes...**a) Savoir faire indispensable :**

Savoir dériver les fonctions du type $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$: en dérivant $F(b(x)) - F(a(x))$.

Exemple : étudier $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos} \sqrt{t} dt$.

b) C'est souvent une bonne idée de dériver :

Exemple : montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$.

c) Parfois, le x n'est pas que dans les bornes... on essaie de s'y ramener : cf. planche.

3) Sommes de Riemann d'une fonction continue**a) Définition :**

(i) Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\sigma = \{a = c_0 < \dots < c_n = b\}$ et pour tout $k = 1, \dots, n$,

on se donne un $x_k \in [c_{k-1}, c_k]$, on définit la SdR : $S_{\sigma, (x_k)}(f) := \sum_{k=1}^n f(x_k)(c_k - c_{k-1})$.

(ii) Cas particulier le plus utile : si σ est régulière et les $x_k = c_k$ ou c_{k-1} .

Forme plus simple $S_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$ (SdR régulière, à gauche)

ou $S'_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n})$ (SdR régulière, à droite).

b) Thème de convergence des sommes de Riemann (suivant le programme, on se limite aux subdivisions régulières)**(i) Le théorème :**

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit :

$$S_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n}), \quad \text{ou} \quad S_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n}).$$

$$\text{Alors : } S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

(ii) Point de départ de la démonstration :

- Au départ, pour bien majorer la différence $|S_n(f) - \int_a^b f|$: penser à tout écrire sous forme intégrale

Idee : on découpe l'intégrale pour se ramener à des intégrales de fonctions constantes :

$$S_n(f) - \int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{c_k}^{c_{k+1}} (f(c_k) - f(t)) dt \right) \quad (1)$$

(iii) Deuxième étape de la démonstration avec l'hyp. f continue : $\forall \varepsilon$ et U.C.

- Comme dans le théorème d'approximation uniforme : c'est l'uniforme continuité de f qui va permettre de majorer $|S_n(f) - \int_a^b f|$ par un ε fixé

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue (Heine), on prend un α d'uniforme continuité pour $\varepsilon' = \dots$. Autrement dit, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon'$.

Si on fixe n_0 tel que $\frac{(b-a)}{n_0} < \alpha$, alors pour tout $n \geq n_0$ chaque intervalle $[c_k, c_{k+1}]$ de la subdivision régulière de pas $(b-a)/n$ est de longueur strictement inférieure à α et donc :

$$\forall t \in [c_k, c_{k+1}], \quad |f(t) - f(c_k)| < \varepsilon' \quad (2)$$

On déduit immédiatement de (2) que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{c_k}^{c_{k+1}} |f(c_k) - f(t)| dt \leq (c_{k+1} - c_k) \varepsilon'.$$

Donc par I.T. sur les Σ et les intégrales, avec (1) :

$$\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} |f(c_k) - f(t)| dt \leq \varepsilon' \sum_{k=0}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = (b-a) \varepsilon'.$$

En ayant choisi au départ $\varepsilon' = \varepsilon/(b-a)$, on a ainsi $\forall n \geq n_0$, $\left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$, ce qui achève la dém. du thme. $\square$

(iv) **Deuxième étape de la démonstration, dans le cas part. où f est de classe $\mathcal{C}^1$:**

Dém. exigible (programme) : le caractère lipschitzien remplace l'U.C.

Rappel : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $M_1 = \sup_{[a, b]} |f'|$. Alors f est M_1 -lip.

Preuve du rappel :

On va démontrer la propriété plus précise suivante :

Prop. (majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles pour une fonction $\mathcal{C}^1$)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n},$$

où, bien sûr, $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$, et $M_1 = \|f'\|_\infty$.

Remarque : Cette prop. prouve non seulement la convergence des SdR vers $\int_a^b f$, pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, mais dit en outre que, dans ce cas, *cette convergence est en $O(1/n)$.*

Preuve de la prop. : Même point de départ qu'au (ii) :

$$S_n(f) - \int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{c_k}^{c_{k+1}} (f(c_k) - f(t)) dt \right) \quad (1)$$

Comme f est M_1 -lipschitzienne sur $[a, b]$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $t \in [c_k, c_{k+1}]$

$$|f(t) - f(c_k)| \leq M_1 |t - c_k| \Rightarrow \int_{c_k}^{c_{k+1}} |f(t) - f(c_k)| dt \leq M_1 \int_{c_k}^{c_{k+1}} (t - c_k) dt = M_1 \left[\frac{(t - c_k)^2}{2} \right]_{c_k}^{c_{k+1}}$$

Ainsi en ajoutant ces inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} |f(t) - f(c_k)| dt \leq M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(c_{k+1} - c_k)^2}{2}$$

Or chaque pas $c_{k+1} - c_k$ est égal à $(b-a)/n$ d'où la majoration :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} |f(t) - f(c_k)| dt \leq M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

Par I.T. et I.T. sur les intégrales dans (1), on en déduit la majoration de la prop. $\square$

c) Généralisation aux fonctions continues par morceaux :

Théorème (admis) : le théorème de convergence des sommes de Riemann se généralise aux fonctions continues par morceaux et même à toutes les fonctions f telles que $\sup E_-(f) = \inf E_+(f)$ dans la déf. de l'intégrale.

d) Application des sommes de Riemann : dans les deux sens !

- (i) On peut parfois calculer (ou obtenir des propriétés) des intégrales à l'aide de S.d.R. Cf. pl.
 (ii) A l'inverse (plus souvent), on peut interpréter une suite donnée comme une somme de Riemann pour déterminer la limite de cette suite.

Le plus souvent, utiliser les formes : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, ou $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

- (iii) Ex. d'application directe de l'idée du (ii) :

Déterminer la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

En général, d'abord modifier : encadrement, équivalents, cf. planche.

(iv) **Informatique : Intégration numérique** La prop. du b) (iv) dit en particulier que la méthode des rectangles converge en $O(1/n)$ (mais on peut faire mieux, trapèzes, Simpson...).

4) Cas des fonctions positives :

a) Un théorème où la continuité est cruciale :

Théorème : Si f continue, positive alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$.

Contraposée : Si f est continue, positive et n'est pas la fonction nulle, alors $\int_a^b f > 0$.

On va démontrer au b) un théorème qui implique ce théorème-ci.

b) Théorème dans le cas général des fonctions C.P.M. :

Si $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f = 0$ entraîne que f admet une limite à droite et à gauche nulle en tout point de $[a, b]$. En particulier, f est nulle en tout point où elle est continue.

Preuve : Soit $x_0 \in [a, b]$. Comme f est continue par morceaux, elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 (d'un côté seulement si x_0 est aux bornes).

Par l'absurde si par exemple $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l > 0$.

Alors par déf. de la limite, il existe un $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]x_0, x_0 + \alpha[, f(x) \geq l/2$.

Remarque : Même si l'inégalité précédente n'est supposée vraie pour les x dans l'intervalle ouvert, on peut intégrer cette inégalité sur $[x_0, x_0 + \alpha]$, en considérant que l'intégrale définie ici pour une fonction C.P.M. ne change pas si on change la valeur de la fonction en deux points (petits pois).

Donc ici, par intégration, on en déduit que $\int_{x_0}^{x_0+\alpha} f \geq \alpha l/2 > 0$.

Or par relation de Chasles, $\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+\alpha} f + \int_{x_0+\alpha}^b f$.

Dans le membre de droite les trois termes sont positifs comme intégrales d'une fonction continue par morceau positive et le terme du milieu est strictement positif, ce qui donne $\int_a^b f > 0$, et la contradiction. $\square$

c) Une autre conséquence du théorème du a) sur les fonctions continues positives :

- (i) On sait que : $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ (I.T.I).

(ii) **Prop.** Dans le cas où f est une fonction continue, on a la C.N.S. d'égalité suivante :

$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$ si, et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

Preuve Le sens est évident.

Pour le sens : on a $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$ (H).

On considère le nombre $\int_a^b f$ qui est ou bien positif, ou bien négatif.

• Si $\int_a^b f$ est positif, on a donc par (H), $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ et donc $\int_a^b (|f| - f) = 0$. Mais $|f| - f$ est alors une fonction *continue, positive*, d'intégrale nulle. Par le a), $|f| - f$ est la *fonction nulle* donc $|f| = f$ i.e. f est positive sur $[a, b]$.

• Si $\int_a^b f$ est négatif, on a par (H), $\int_a^b f = - \int_a^b |f|$ et donc $\int_a^b (|f| + f) = 0$. On conclut de même que cette fois $f = -|f|$ et donc que f est négative sur $[a, b]$. $\square$

V Ce qu'on peut faire pour étudier des intégrales sans les calculer :

• Les techniques de calculs d'intégrales seront revues et complétées au I2. Revoir déjà ce qui a été vu au B4 sur ce sujet.

• Cependant, pour beaucoup de problèmes, où apparaissent des fonctions définies à l'aide d'intégrales ou des suites d'intégrales, il peut être plus facile de comprendre des propriétés de la fonction et de la suite, à partir de la forme intégrale bien mieux qu'à partir d'une éventuelle "expression explicite" qu'on ne sait pas calculer ou dont le calcul fournirait des fonctions horribles.

1) Pour l'étude d'une limite, une simple majoration peut suffire : privilégier les v. abs et l'I.T.I

Exemple : Si $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, montrer que $I_n = \int_0^1 f(t)t^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2) Pour des équivalents, une méthode où "l'I.P.P. fait sortir le terme prépondérant"

(i) Exercice 1 : équivalent de $I_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$ dans l'hyp. $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $f(1) \neq 0$.

(ii) Souvent cette méthode est utilisée avec le lemme d'intégration des négligeables (chap. F2) :

Si $f(t) = o(g(t))$ et g est de signe constant quand $t \rightarrow 0^+$ (resp. 0^-) alors $\int_0^x f(t)dt = o(\int_0^x g(t)dt)$ en 0.

Ce lemme entraîne aussi un lemme d'intégration des équivalents en 0 (chap. F2) :

Si f et g sont de signe constant de chaque côté de 0 et $f \underset{x \rightarrow 0}{\sim} g$ alors $\int_0^x f \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_0^x g$.

(iii) Cas où le lemme du (ii) donne directement un équivalent :

Soit $I(x) = \int_0^x \sin(\ln(1 + \tan(t)))dt$. Déterminer un équivalent de $I(x)$ quand $x \rightarrow 0$.

(iv) Cas où on n'a pas d'équivalent pour l'intégrande, et où on applique la méthode d'I.P.P.

Soit $I(x) = \int_0^x e^{-1/t} dt$. Donner un équivalent de $I(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

3) Exemple où l'équivalent se dégage par changement de variables

Exercice : Equivalent de $F(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt$ quand $x \rightarrow +\infty$.

N.B. – La limite de $\int_0^x e^{-u^2} du$ notée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ intégrale de Gauss.