

Sol. ex. pl. 52

Exercice 4. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$ et $S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$ et $S \in \{-1, 1\}$.

b) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sigma = 0$, et $S = 1$.

c) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c soient les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

d) Justifier que si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ alors $a^3 + b^3 + c^3 \in [5/9, 1]$.

Solution 4 a) $M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \|C_i\| = 1, \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow (C_i | C_j) = 0 \end{cases}$.

$$\text{Donc } M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & (1), \\ ab + ac + bc = 0 & (2) \end{cases}$$

Compte-tenu de l'égalité $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma$, on obtient bien que

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 1, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

b) On remarque qu'avec $C_1 \mapsto C_1 + C_2 + C_3$, $\det(M) = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$

Via $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, 3$, on obtient que $\det(M) = (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a - b & b - c \\ 0 & c - b & a - c \end{vmatrix}$.

Finalement $\det(M) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

Avec la condition $\sigma = 0$, on a donc $\det(M) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

Donc $\det(M) > 0 \Leftrightarrow (a + b + c) > 0 \Leftrightarrow S > 0$.

Donc en rajoutant cette condition aux deux conditions du a), on trouve bien que :

$$M \in S_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

N.B. Cette question portait davantage sur les déterminants que sur les matrices orthogonales.

c) Là cela devient vraiment un exercice sur les polynômes.

On a vu au b) que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ équivaut à la donnée des deux fonctions symétriques élémentaires $S = 1$ et $\sigma = 0$ du polynôme $P = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - SX^2 + \sigma X - \Pi$ où $\Pi = abc$.

Ainsi la condition sur (a, b, c) équivaut à dire que (a, b, c) sont les trois racines réelles (en répétant les racines multiples) d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est la valeur de $-abc$.

Question : pourquoi a-t-on cette étrange C.N.S. sur k ?

Réponse la plus simple avec de l'analyse : $P'(X) = 3X^2 - 2X$ s'annule en 0 et en $2/3$. Donc P est stnt croissante sur $] -\infty, 0]$, stnt décroissante sur $[0, 2/3]$ et stnt croissante sur $[2/3, +\infty[$.

On calcule $P(0) = k$ et $P(2/3) = 8/27 - 4/9 + k = k - 4/27$. Pour que P s'annule sur chaque intervalle de monotonie, il faut et il suffit que $P(0) > 0$ et $P(2/3) < 0$ donc que $k > 0$ et $k - 4/27 < 0$.

Ce qui est équivalent à l'encadrement de k donné par l'énoncé.

Remarque : une méthode algébriquement demanderait de connaître le discriminant des polynômes du troisième degré, en plus ici ledit polynôme n'est même pas sous la forme $X^3 + pX + q$

d) **(M1)** Si on calcule autrement $\det(M)$ par Sarrus, $\det(M) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ expression qui a l'avantage de faire intervenir le produit $\pi = abc$.

Ainsi $\det(M) = 1$ donne ici que $1 + 3abc = a^3 + b^3 + c^3$ et $k = -abc$ par le lien coeff./racines donc $a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3k$.

Et donc la condition équivaut à $a^3 + b^3 + c^3 \in [5/9, 1]$.

(M2) avec les formules de Newton, on peut calculer $a^3 + b^3 + c^3$ en fonction des fonctions symétriques élémentaires :

$$s_3 - Ss_2 + \sigma S - 3abc = 0$$

Donc ici avec $S = 1$ et $\sigma = 0$ et $s_2 = 1$, on obtient de même $abc = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3)$.

Exercice 5. Calculer $\text{Card } O_n(\mathbb{R}) \cap M_n(\mathbb{Z})$.

Solution 5 Fait en classe mais je reprends de manière moins technique et plus racontée :

Si $A \in O(n) \cap M_n(\mathbb{Z})$, dans chaque colonne de A , la condition $\|C_i\| = 1$ donne qu'il y a exactement une entrée non nulle, qui vaut ± 1 .

La condition $(Ci|C_j) = 0$ pour $i \neq j$ dit que dans chaque colonne, l'entrée non nulle est à une ligne différente.

Le nombre de matrices de $O(n) \cap M_n(\mathbb{Z})$ dont les entrées non nulles sont toutes égales à 1 est donc le nombre de façon de placer un 1 par ligne dans les n lignes. C'est donc $n!$.

Comme ensuite pour chaque entrée, on a en fait le choix de ± 1 et qu'il y a n entrées non nulle, le nombre total est $2^n n!$.

Exercice 6. Déterminer le commutant de $SO(2, \mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ i.e. $\mathcal{C} = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \forall M \in SO(2, \mathbb{R}), AM = MA\}$

Solution 6 On sait déjà que $SO(2, \mathbb{R})$ est commutatif donc que $SO(2, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$. De plus si $A \in SO(2, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, λA va aussi commuter avec tous les $M \in SO(2, \mathbb{R})$.

Autrement dit toutes les matrices de similitudes de la forme λA sont dans $\mathcal{C}$ (avec en plus la matrice nulle qui correspond au cas $\lambda = 0$).

Réciproquement : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in SO(2, \mathbb{R})$, $AM = MA$.

En particulier A commute avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$.

Or en calculant AM et MA on trouve $a = d$ et $b = -c$. Donc $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ donc A est une matrice de similitude directe (ou nulle).

Conclusion : $\mathcal{C}$ est exactement l'ensemble des matrices de similitudes directes avec la matrice nulle i.e. l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Similitudes :

Exercice 8. Soit E euclidien. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une *similitude* si, et seulement si, $f = \lambda g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $g \in O(E)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ montrer que f préserve l'orthogonalité i.e. $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \lambda g$.

Solution 8 Un seul sens n'est pas évident. Soit donc f qui préserve l'orthogonalité. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base o.n. de E .

On sait que pour tout $i \neq j$, $f(e_i)$ et $f(e_j)$ sont orthogonaux. Si on montre qu'ils sont tous de même norme, en appelant λ cette valeur commune, alors la famille des $(f(e_1)/\lambda, \dots, f(e_n)/\lambda)$ sera une b.o.n. et donc $g = f/\lambda$ sera dans $O(E)$ ce qui donnera la conclusion.

Or soit $i \neq j$, on considère $(e_i + e_j)$ et $e_i - e_j$ qui sont deux vecteurs orthogonaux, donc $f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) = 0$ ce qui en développant donne $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = 0$ et la conclusion. $\square$