QCM Chap. H1 : espaces préhilbertiens

1) Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ des réels. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut majorer $\sum_{i=1}^{n} a_k$ par

   (1) $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$, (2) $n \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, (3) $\sqrt{n \sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

2) Soit $(x, y) \in E^2$ où $(E, (\ |\ ))$ est un espace préhilbertien. Si $\|x\| = 1$ et $\|y\| = 2$ alors $\|x - y\|$ est :

   (1) compris entre 1 et $\sqrt{5}$

   (2) égal à 1,

   (3) compris entre 1 et 3.

3) Soit $(x, y) \in E^2$ deux vecteurs d'un espace préhilbertien $(E, (\ |\ ))$. A quelle condition (nécessaire et suffisante) les vecteurs $x + y$ et $(x - y)$ sont ils orthogonaux ?

   (1) Lorsque $x \perp y$

   (2) Lorsque $\|x\| = \|y\|$

   (3) Aucune des deux prop. précédentes n'est vraie.

4) Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. On définit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t).g(t)dt$.

   (1) L'application φ est une forme bilinéaire, symétrie, positive, mais pas "définie-positive".

   (2) (E, φ) n'est pas un espace euclidien.

   (3) L'application φ est un produit scalaire et (E, φ) est un espace euclidien.

5) Avec les notations de la question précédente, on note en plus $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-ensemble de E formé par les fonctions paires (resp. impaires).

   (1) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux s.e.v. de E en somme directe car $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \varnothing$.

   (2) $\forall\, (f, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$, $\varphi(f, g) = 0$ donc $\mathcal{P} \supset \mathcal{I}^{\perp}$ et $\mathcal{I} \supset \mathcal{P}^{\perp}$.

   (3) $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.

6) Toujours avec les mêmes notations, on note $(e_0, e_1, e_2) \in E^3$ où $e_i : x \mapsto x^i$. La famille orthogonale (p_0, p_1, p_2) obtenue par orthogonalisation de Gram-Schmidt à partir de (e_0, e_1, e_2) est définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

   (1) $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - 1$, $p_2(x) = x^2 - 1/3$,

   (2) $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_3(x) = x^2 - 2/3$.

   (3) Aucune des deux familles précédentes.

7) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien $(E, (\ |\ ))$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ son orthonormalisée de Gram-Schmidt. Laquelle des propriétés suivantes n'est pas forcément réalisée :

   (1) f_k est proportionnel à e_k pour tout k,

   (2) $\|f_k\| = 1$ pour tout k,

   (3) $(e_k | f_k) > 0$ pour tout k.

8) Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (-1, 1)$ qui est une base orthogonale de E. Les coordonnées de $u = (2, 1)$ dans cette base orthogonale sont (en les écrivant horizontalement juste par commodité)

   (1) $(3/2, -1/2)$,

   (2) $(3, -1)$,

   (3) $(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Solutions :

1) Réponse (3) :

L'I.C.S. appliquée à $u = (a_1, \dots, a_n)$ et $v = (1, \dots, 1)$ donne :

$$|(u|v)| \leq ||u||.||v||,$$

donc

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} = \sqrt{n.\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

A fortiori on a la majoration de $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

2) Réponse (3) :

(M1) Par bilinéarité du p.s.

$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x|y) = 5 - 2(x|y)$.

Mais $|(x|y)| \leq ||x||.||y|| = 2$.

Donc $||x-y||^2 \in [5-4, 5+4] = [1, 9]$ et la conclusion.

Les deux autres réponses ne sont pas raisonnables :

le cas où $||x-y|| = \sqrt{5}$ correspondrait au cas très particulier où le p.s. $(x|y)$ est nul.

(M2) Par inégalité triangulaire, on sait que $||x-y|| \leq ||x|| + ||-y|| = ||x|| + ||y|| = 3$.

D'autre part, par la seconde inégalité triangulaire : $||x-y|| \geq ||y|| - ||x|| = 2 - 1 = 1$.

3) Réponse (2) :

En effet par bilinéarité : $(x+y|x-y) = ||x||^2 - ||y||^2$

4) Réponse (2) :

On a vu en cours que φ est un p.s. donc (1) est fausse.

En revanche E n'est pas de dim. finie donc n'est pas euclidien donc (2) est vraie et (3) est fausse.

5) Réponse (3) :

(1) est fausse car l'intersection n'est pas vide, mais réduite à $\{0\}$

(2) est fausse car le *donc* est faux !

Le fait que pour tout $(f, g) \in \mathcal{P} \times I$, $\varphi(f, g) = 0$ dit que tout $f \in \mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{I}$ donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^\perp$ (inclusion dans l'autre sens).

L'autre inclusion est vraie aussi mais ce n'est pas le bon argument.

(3) on a vu que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ en cours depuis longtemps. Le fait que $(f, g) \in \mathcal{P} \times I$, $\varphi(f, g) = 0$ dit que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^\perp$.

Montrons l'inclusion réciproque :

Soit $f \in \mathcal{P}^\perp$. On le décompose en $f = f_p + f_i$ avec $(f_p, f_i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$.

Alors $(f|f_p) = 0 \quad (1)$ puisque $f \in \mathcal{P}^\perp$.

Mais comme $f = f_p + f_i$ on a $(f|f_p) = (f_p|f_p) + (f_i|f_p) = ||f_p||^2 \quad (2)$ car $f_i \perp f_p$.

Avec (1) et (2) on obtient $||f_p||^2 = 0$ donc $f_p = 0$ et donc $f = f_i \in \mathcal{I}$.

Ceci montre l'inclusion $\mathcal{P}^\perp \subset \mathcal{I}$.

Au total on a bien l'égalité $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$ comme annoncé.

6) Réponse (3)

La base orthogonale obtenue par G.S. est donnée par

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2 - 1/3$.

7) Réponse (1) : si (1) est réalisée, la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est déjà orthogonale !

Par ailleurs vérifions bien que (2) est (3) sont vraies.

Pour (2) c'est évident puisque $(f_1, \dots, f_n)$ est orthonormale.

Pour (3) parce qu'on construit $f_k = g_k/||g_k||$ normalisé d'un vecteur $g_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i$.

Ainsi $e_k = ||g_k||f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i$ et $(e_k|f_k) = ||g_k|| > 0$.

8) Réponse (1) : La base $(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2})$ où $\widetilde{e_1} = e_1/\|e_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e_1$, $\widetilde{e_2} = e_2/\|e_2\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e_2$ est une base orthonormale de E.

Dans la b.o.n. $(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2})$, on a $u = (u|\widetilde{e_1})\widetilde{e_1} + (u|\widetilde{e_2})\widetilde{e_2}$.

Donc $u = \dfrac{(u|e_1)}{\|e_1\|^2} e_1 + \dfrac{(u|e_2)}{\|e_2\|^2} e_2$.

Or avec le p.s. canonique $(u|e_1) = 2 + 1 = 3$ et $(u|e_2) = -2 + 1 = -1$.

Donc $u = \dfrac{3}{2} e_1 - \dfrac{1}{2} e_2$.