

Rédaction Ex. pl. 53

Exercice 1 (Formule du crible). Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

a) Exprimer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonction de $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(C)$ et des cardinaux d'ensembles obtenus par intersections de A, B et C ($A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$).

b) Même question pour quatre ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 .

c) Ecrire une formule pour n ensembles....

Solution 1 a) Par associativité de $\cup$: on pose $B' = B \cup C$, on sait alors que :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A \cup B') = \text{Card}(A) + \text{Card}(B') - \text{Card}(A \cap B') \quad (1)$$

$$\text{or } \text{Card}(B') = \text{Card}(B \cup C) = \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(B \cap C) \quad (2)$$

$$\text{et } A \cap B' = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\text{donc } \text{Card}(A \cap B') = \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C) \quad (3)$$

et (2) et (3) dans (1) donnent :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

b) Généralisons à quatre ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 la formule du a) :

Montrons que :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^4 \text{Card}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \text{Card}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \text{Card}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Notons $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

$$\text{Alors } \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \text{Card}(X \cup A_4) = \text{Card}(X) + \text{Card}(A_4) - \text{Card}(X \cap A_4) \quad (1).$$

Par distributivité $X \cap A_4 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)$ donc en appliquant à cet union la formule du a), on déduit :

$$\text{Card}(X \cap A_4) = \sum_{i=1}^3 \text{Card}(A_i \cap A_4) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \text{Card}(A_i \cap A_j \cap A_4) + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \quad (2)$$

En remplaçant (2) et la formule du a) donnant $\text{Card}(X)$ dans (1) on obtient (*).

$$\text{c) } \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Cette formule peut se prouver par récurrence ou ... autrement à l'aide du calcul sur les fonctions caractéristiques, nous y reviendrons peut-être.

Exercice 2. On considère une rangée de six fauteuils de cinéma, numérotés de 1 à 6. On considère trois hommes et trois femmes. Combien il y a-t-il de façons de les placer sur les six fauteuils de sorte que deux personnes du même sexe ne soient jamais voisines ?

Solution 2 a) 1^{ème} rédaction : la plus efficace

Numéro du fauteuil	1	2	3	4	5	6
Nombre de choix	6	3	2	2	1	1

Donc il y a $6 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$ possibilités.

2^{ème} rédaction possible : idem 1 en distinguant si un homme ou une femme se place en premier

Notons $F_1, F_2, \dots, F_6$ les six fauteuils

• Premier cas : le premier fauteuil F_1 est occupé par un homme.

On a alors trois choix d'hommes possible pour F_1 Puis trois choix de femmes pour F_2 Puis deux choix d'hommes pour F_3 Deux choix de femmes pour F_4 et la fin est déterminée.

Cela fait $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ possibilités pour ce premier cas.

• Deuxième cas : F_1 est occupé par une femme. On a (de même) 36 possibilités.

On retrouve $36 + 36 = 72$ possibilités.

Exercice 3. On dispose de sept cases vides alignées et on veut les remplir avec 4 fois la lettre F et trois fois la lettre P . Combien de mots différents peut-on former ?

Solution 3 (M1) Idée : se donner un mot c'est ni plus ni moins que se donner la place des P (par exemple).

On doit donc choisir trois places parmi les 7 possibles pour les P : d'où $\binom{7}{3} = 35$ possibilités.

(M2) Plus compliqué : ceux qui pensent au départ aux lettres comme discernables. On numérote les lettres $F_1, F_2, F_3, F_4, P_1, P_2, P_3$. Alors on a 7! façons de les placer sur les cases. Mais ensuite, il faut considérer que toutes les permutations des F_i entre eux (il y en a 4!) et toutes celles des P_i entre eux (il y en a 3!) donnent le même mot : plus mathématiquement, on a une surjection de l'ensemble des permutations des 7 lettres sur l'ensemble des mots telle que chaque mot a exactement $3! \times 4!$ antécédents.

Donc le nombre total de mots est $\frac{7!}{4!3!} = 7 \times 5 = 35$. $\square$

Exercice 4. Soit E un ensemble de cardinal n . a) $a_0 \in E$ est fixé. Déterminer le nombre de parties de E contenant a_0 .

b) Soit $A \subset E$ de cardinal p . Déterminer le nombre de parties B de E telles que $\text{Card}(A \cap B) = 1$.

c) Même question qu'au b), avec la condition $\text{Card}(A \cap B) \geq 1$.

Solution 4 a) Toute partie A de E contenant a_0 s'écrit $A = \{a_0\} \cup A'$ où $A' \subset E \setminus \{a_0\}$.

Choisir une partie de E contenant a_0 équivaut à choisir une partie de $E \setminus \{a_0\}$. Il y a 2^{n-1} telles parties.

Rédaction plus formelle. : notons $\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E), A \ni a_0\}$.

Alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble de tous les $\{a_0\} \sqcup A'$ pour $A' \in \mathcal{P}(E \setminus \{a_0\})$

Ainsi $\mathcal{S}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(E \setminus \{a_0\})$, donc $\text{Card}(\mathcal{S}) = \text{Card} \mathcal{P}(E \setminus \{a_0\}) = 2^{n-1}$.

(Explicitement cette bijection est $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(E \setminus \{a_0\}), A \mapsto A \setminus \{a_0\}$ de récip. $\Psi : A' \mapsto A' \sqcup \{a_0\}$).

b) **Idée** : Par construction progressive, choisir B c'est choisir : • l'élément $a \in A$ qui est dans B : p choix.

• ce choix ayant été fait, choisir une partie B' de $E \setminus A$ telle que $B = \{a_0\} \cup B'$. Il y a 2^{n-p} choix de telles parties.

Au total on a $p2^{n-p}$ possibilités.

Rédaction plus formelle avec une bijection (si vous aimez) Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties B de E telles que $\text{Card}(A \cap B) = 1$.

On considère l'application $\Phi : B \in \mathcal{S} \mapsto (B \cap A, B \cap A^c)$. Alors $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}_1(A) \times \mathcal{P}(A^c)$ est *bijective*, où on note $\mathcal{P}_1(A)$ l'ensemble des parties de A à 1 élément.

Donc $\text{Card}(\mathcal{S}) = \text{Card}(\mathcal{P}_1(A)) \times \text{Card}(\mathcal{P}(A^c)) = p \cdot 2^{n-p}$.

c) **(M1) avec le complémentaire** Notons encore $\mathcal{S}$ l'ensemble cherchée. Le complémentaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de parties B de E telles que $A \cap B = \emptyset$ i.e. l'ensemble des parties B de $E \setminus A$. Il y a en a donc 2^{n-p} . Donc $\text{Card}(\mathcal{S}^c) = 2^{n-p}$ et $\text{Card}(\mathcal{S}) = \text{Card}(\mathcal{P}(E)) - \text{Card}(\mathcal{S}^c) = 2^n - 2^{n-p}$.

(M2) analogue au b) Se donner $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \cap A \neq \emptyset$ équivaut à :

- se donner une partie de A , non vide : $2^p - 1$ choix,
- se donner une partie quelconque de $E \setminus A$: 2^{n-p} choix.

Au total $2^{n-p}(2^p - 1)$ choix.

Version plus formelle de la **(M2)** : en notant toujours $\mathcal{S}$ l'ensemble cherché on a une bijection

$$\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(A)^* \times \mathcal{P}(E \setminus A), B \mapsto (B \cap A, B \cap A^c),$$

où on a noté ici, $\mathcal{P}(A)^*$ pour l'ensemble des parties non vides de A .