

Les polynômes sont nos amis

Exercice 1 (Hürwitz full-fledged). En exercice de cours nous avons calculé $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$.

Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$ pour $a \neq b$, en considérant $\Delta_n(X) = \begin{vmatrix} x_1 + X & a + X & \dots & a + X \\ b + X & x_2 + X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b + X & \dots & b + X & x_n + X \end{vmatrix}$,

et en montrant que $\Delta_n(X)$ est un polynôme de degré au plus un.

Indication – Pour simplifier, on exprimera le résultat en fonction des valeurs de la fonction polynomiale $Q : x \mapsto (x_1 - x) \dots (x_n - x)$.

Retrouver le résultat de D_n à partir de celui du Δ_n par un raisonnement de passage à la limite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Des blocs, des blocs

Exercice 2 (Déterminant triangulaire par bloc : Résultat de cours). Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in M_k(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$ et en conséquence, $B \in M_{k,n-k}(\mathbb{K})$ (on dit que M est donnée “par blocs”). On veut montrer que :

$$\det M = \det A \cdot \det C.$$

1) (M1) Avec l’expression combinatoire du déterminant : on va raisonner comme dans le cours, où l’on a traité le cas où A est une matrice (1,1), précisément :

a) Montrer que, dans l’expression combinatoire du déterminant, on peut ne considérer que les σ tels que $\sigma([1, k]) = [1, k]$.

b) Montrer que si σ vérifie la condition du a) et $\sigma_1 = \sigma|_{[1, k]}$ et $\sigma_2 = \sigma|_{[k+1, n]}$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$,

c) Conclure.

2) (M2) avec une décomposition astucieuse : on remarque d’abord que la matrice M peut se décomposer suivant le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Qu’y gagne-t-on ?

Exercice 3 (Opérations par blocs). Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$.

Exercice 4 (Cas où on a $\det(AD - BC)$). Soit $M \in M_{2n}(\mathbb{K})$ qu’on écrit par bloc (carrés de mêmes tailles n), $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec A, B, C, D matrices carrées de même taille n .

a) Montrer à l’aide d’un contre-exemple, qu’en général, il est faux que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

b) On suppose maintenant que D et C commutent et que D est inversible.

i) Montrer qu’il existe des matrices U, V, W dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que : $M = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ W & I \end{pmatrix}$.

(C’est l’analogie par bloc de la décomposition LU vue en info, bon ici $UL\dots$)

ii) En déduire que dans ce cas la formule du a) est vraie.

c) (2ème année) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que le résultat du 2 reste vrai si on ne suppose plus D inversible.

Déterminants qu'on voit comme produits de deux déterminants

Exercice 5. Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Indication possible : $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$.

Pour l'exercice suivant (et d'autres) : remarquons qu'on peut calculer le produit de deux déterminant $\det(U) \cdot \det(V)$ comme $\det(U \cdot V)$ mais aussi $\det(U \cdot {}^tV)$ ou $\det({}^tU \cdot V)$. Autrement, on peut faire le produit des matrices lignes fois lignes ou colonne fois colonnes.

Exercice 6. Soit $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n \in K[X]$ qui admet une écriture scindée $P = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$.

On note aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s_k = \sum_{i=1}^n z_i^k$, les sommes de Newton des racines de P .

Montrer que

$$\prod_{1 \leq k < l \leq n} (z_l - z_k)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Comatrice et Cramer

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Montrer que $\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$.

Exercice 8 (Dérivée n -ième d'un quotient). Soit $(g, h) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ telles que h ne s'annule pas sur I . Soit $f = g/h$.

Montrer que $f^n = \frac{\Delta}{h^{n+1}}$ où $\Delta = \begin{vmatrix} h & 0 & 0 & \dots & 0 & g \\ h' & h & 0 & \dots & 0 & g' \\ h'' & \binom{2}{1}h' & h & \ddots & \vdots & g'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h^{(n)} & \binom{n}{1}h^{(n-1)} & \dots & \dots & \binom{n}{n-1}h' & g^{(n)} \end{vmatrix}$. Indication pos-

sible – Formule de Cramer appliquée à un système ...

Exercice 9 (Après le cours du H3). Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \text{Com}(M)$ où $\text{Com}(M)$ désigne la comatrice de M .