Ecriture en b.o.n.

Exercice 1 (Généralise les deux précédents)**.** Soit E un e.v. euclidien. On suppose qu'il existe $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tels que $\forall\, x \in E$, $\sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = \|x\|^2$.

a) Montrer que si on suppose que $\|e_i\| \geq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

b) On ne suppose plus $\|e_i\| \geq 1$ mais on suppose que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Montrer qu'on a la même conclusion.

c) Montrer que, si on n'a aucune des deux hypothèses du a) ou du b), il se peut que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ ne soit pas une b.o.n. de E.

Exercice 2. Soit $(E, (\,.\,|\,.\,))$ euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n. de E. Montrer que le nombre $\displaystyle\sum_{i=1}^n (f(e_i)|e_i)$ est indépendant du choix de la b.o.n. $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Soit $f\,:\, E \to E$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^p (u_i|x) u_i$.

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. *Indication* – Pour $x \in \ker f$ que dire de $(f(x)|x)$?

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Exercice 4 (Archi-classique)**.** Dans $M_n(\mathbb{R})$ avec son p.s. canonique, déterminer l'orthogonal du s.e.v $S_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques.

Exercice 5 (Incontournable : résultats de cours)**.** Soit $(E, (\,.\,|\,.\,)$ un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un p.s.

a) Si $A \subset B$ sont deux parties de E que dire de $A^\perp$ et $B^\perp$? b) En dim. quelconque (finie ou infinie) que dire de $(F^\perp)^\perp$. c) En dim. finie, que dire de mieux ? Contre-exemple en dim. infinie ?

Exercice 6 (Incontournable : résultats de cours)**.** Si E est euclidien, et F et G sont deux sev de E, comparer $(F+G)^\perp$, $F^\perp + G^\perp$, $F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp$.

Quels sont les résultats qui demeurent vrais en dim. infinie ?

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Si $(f, g) \in E^2$, on pose $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$.

a) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire.

b) On pose $V = \{f \in E,\, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $a = (1, 2, 3, 4)$. Soit $H\,:\, 4x + 3y + 2z + t = 0$. Calculer la distance de a à H.
Indication : la composante normale suffit ! Pas besoin du calcul explicite du projeté orthogonal.

Exercice 9. Calculer $L = \inf\{\int_0^{2\pi} |\sin(t) - at - b|^2 dt,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ en justifiant (brièvement) votre démarche. On exprimera L comme une intégrale d'une fonction explicite, sans calculer cette intégrale.

Exercice 10. On note $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sin(n\square)$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, les fonctions $(s_1, \dots, s_n)$ sont deux à deux orthogonales pour le p.s. défini par $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$. **Rem.** On retrouve ainsi l'indep. lin. des s_k, cf. un ex. déjà vu...

b) Montrer encore que si on note $c_k = \cos(k\square)$ les fonctions $(s_1, \dots, s_n, c_0, \dots, c_n)$ sont deux à deux orthogonales.

c) Soit $F_n = \operatorname{Vect}(c_0, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$. Soit $f \in E$ et $\widetilde{f}$ son projeté orthogonal sur F_n.
On peut donc écrire $\widetilde{f}$ sous la forme $\widetilde{f} = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\square) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\square)$: expliciter les a_k et les b_k comme des intégrales faisant intervenir f.

Rem. 1 – Il y a un petit piège. **Rem. 2** – Cet exercice est une baby-theory des séries de Fourier.

Le principe est d'approximer une fonction par des fonction sinus et cosinus : en physique de décomposer un signal complexe (p.ex. un son) comme une somme de fonctions très simples dont les pulsations sont les multiples (ou harmoniques) d'une pulsation fondamentale. Les coeff. devant les s_n et c_n donnent l'amplitude (et donc la contribution) relative de chaque harmonique.

Exercice 11 (Droite des moindres carrés.. régression linéaire)**. Introduction :** On se donne un nuage de n points $A_1, \dots, A_n$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note $A_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et on suppose que *ces points ne sont pas tous alignés.*

Pour chaque couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on considère la droite $D_{a,b}$ d'équation $y = ax + b$, on note $p_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x, ax+b)$ qui est la projection (affine) sur la droite $D_{a,b}$ parallèlement à la direction verticale.

Pour chaque droite $D_{a,b}$ on considère le nombre $f_v(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{p_{a,b}(A_i)A_i}\|^2$ où $\| \, \|$ est la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^2$. Ce nombre $f_v(a,b)$ est donc la somme des carrés des distances verticales entre les points A_i et la droite $D_{a,b}$ correspondante.

Motivation : *On va montrer qu'il existe un couple (a,b) unique qui rend la somme $f_v(a,b)$* minimale *et expliquer comment calculer cette valeur de (a,b).*

La droite obtenue est appelée droite des moindres carrés *pour le nuage de points $A_1, \dots, A_n$.*

1) Exprimer $f_v(a,b)$ en fonction de coordonnées x_i, y_i et de a et b.

2) Géométrisation en dimension n : On considère $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique.

On le munit du produit scalaire canonique défini par $\forall\, (u,v) \in E^2$, $(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$.

a) Soit $u = \sum_{i=1}^{n} e_i$. A partir des points $A_1, \dots, A_n$ où $A_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ on définit deux vecteurs de E qu'on note $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $w = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Montrer que la famille (u,v,w) est *libre.*

b) Exprimer $f_v(a,b)$ comme le carré d'une distance dans E, faisant intervenir les vecteurs u, v, w.

c) En déduire l'existence et l'unicité du couple (a_0, b_0) réalisant le minimum de $f_v(a,b)$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3) Calcul explicite :

a) Montrer alors que le couple (a_0, b_0) est solution d'un système de deux équations à deux inconnues dont les coefficients sont des produits scalaires faisant intervenir les vecteurs u, v, w.

b) Ecrire un programme en Python qui prend en entrée deux tableaux `X` et `Y` de tailles n et trace la droite des moindre carrée associée aux points `X[i],Y[i]`.