Exercice 1. Donner une expression factorisée des déterminants suivants :
$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Exercice 2. Calculer sous forme factorisée : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$.

Exercice 3 (Activité de découverte : déterminant d'une matrice TS)**.** Soit $T \in TS_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure. Déterminer $\det(T)$ pour $n = 2, 3, 4$.

Exercice 4. Déterminer le déterminant des matrices 4×4 dont les entrées sont $a_{i,j} = \min(i, j)$ et $b_{i,j} = \max(i, j)$.

Exercice 5. Calculer $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$.

Exercice 6. Donner, pour la permutation circulaire $\sigma = (123) \in \mathfrak{S}_3$, deux écritures distinctes de σ comme composée de deux transpositions.

Exercice 7. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 5 & 10 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer σ^{2020}.

Exercice 8 (Résultats utiles : conjugaison et engendrement dans $(S_n, \circ)$)**.** a) Montrer que si $c = (a_1 \dots a_k)$ est un cycle d'ordre k dans $\mathfrak{S}_n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qcq, alors :
$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)),$$
i.e. $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est encore un cycle d'ordre k, comme décrit ci-dessus.

b) En déduire que si $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, on peut choisir une permutation σ telle que $(ij) = \sigma \circ (1\, i) \circ \sigma^{-1}$. Puis en choisissant bien cette permutation σ, que $(i\, j)$ peut s'écrire comme composée de transpositions de la forme $(1k)$.

c) En déduire que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est composée de transpositions de la forme $(1k)$ pour $k = 2, \dots, n$.

Exercice 9 (Une application du précédent)**.** a) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée de transpositions de la forme $(k,\ k+1)$.

b) Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut se décomposer comme un produit où n'apparaissent que $\tau = (1\,2)$ et $c = (1\,2\,\dots\,n)$.

Exercice 10.

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (déterminant $n \times n$).