

Chap. H3 : automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

I Etude générale en dim. n :

E est ici un espace euclidien dim. (finie !) quelconque.

1) Définitions équivalentes

a) (i) Déf. : $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal ssi $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux, encore appelés *isométries linéaires*.

(ii) Rem. Si $f \in O(E)$ alors f est alors injectif et donc bijectif (endo. en dim. finie).

On peut donc dire aussi que les éléments de $O(E)$ sont les **automorphismes orthogonaux**.

(iii) Prop. : $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

b) Exemples et contre-exemples :

(i) **Attention** Malgré le nom, les projecteurs orthogonaux (autres que id) ne sont pas des endomorphismes orthogonaux : pourquoi ?

(ii) En revanche les *symétries orthogonales* sont bien des endomorphismes orthogonaux.

c) Caract. : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a $f \in O(E)$ ssi f “conserve le produit scalaire” i.e.
 $\forall (u, v) \in E^2, (f(u)|f(v)) = (u|v)$.

Remarque — On peut montrer qu'une application de E dans E qui “conserve le p.s.” est automatiquement linéaire (exercice!). (Ce n'est pas le cas d'une appl. qui “conserve la norme”).

d) Caract. : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les trois prop. suivantes sont équivalentes :
 (i) $f \in O(E)$
 (ii) pour toute b.o.n. $\mathcal{B}$ de E , $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n.
 (iii) il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n.

e) Corollaire du d) : caract. matricielle des endomorphismes orthogonaux. :

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ b.o.n. de E , alors : $f \in O(E)$ ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ a ses colonnes deux-à-deux orthogonales et normées (pour le p.s. canonique dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

Illustration : la rotation vectorielle d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On voit bien les colonnes normées, et le p.s. des deux colonnes qui fait zéro.

2) Matrices orthogonales, lien avec les endomorphismes

a) Déf. $A = (C_1, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi $(C_i|C_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

On note $O(n) = O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices orthogonales.

Par construction, $A \in O(n)$ ssi A est la matrice d'un $f \in O(E)$ dans une b.o.n. d'un E euclidien.

Conséq. : $(O(n), \times)$ est un sous-groupe de $(GL(n), \times)$, isomorphe à $(O(E), \circ)$.

b) Rappel sur le produit de matrices : si $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (AB)_{i,j} = L_i(A)C_j(B)$.

Donc $(({}^tA)B)_{i,j} = (C_i(A)|C_j(B))$.

c) Par la rem., on obtient l'importante caract. suivantes des matrices orthogonales :

Caract — $A \in O(n) \Leftrightarrow {}^tAA = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = {}^tA$.

d) **Scholie** — la caract. du c) est souvent prise comme déf. des matrices orthogonales. Malgré la simplicité de la preuve précédente, le changement de point de vue est important car la propriété sur les p.s. des colonnes est maintenant codée par le produit de matrices. Ainsi, la caract. du c) permet de prouver le premier résultat suivant, pas du tout évident avec la déf. du a) :

Propriété — $\forall A \in O(n), \det(A) = \pm 1$.

Une grosse bêtise à éviter : la condition $\det(A) = \pm 1$ ne *suffit pas* pour que A soit orthogonale !

Corollaire – Si $f \in O(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$.

e) **Définition** – On note $SO(n) = \{A \in O(n), \det(A) = 1\}$, $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$.

Prop. $SO(n)$ (resp. $SO(E)$) est un sous-groupe de $(O(n), \times)$ (resp. de $(O(E), \circ)$), appelé groupe *spécial orthogonal*. Dans le cas de $SO(E)$, on parle aussi du sous-groupe des isométries *positives*.

f) **Exemple des symétries orthogonales :**

(i) Rappel : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie ssi $s^2 = \text{id}$.

(ii) Prop. $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale ssi c'est une symétrie et un endomorphisme orthogonal.

(iii) Application *comment on reconnaît quasiment "à l'oeil nu" une matrice de sym. orthogonale (en b.o.n.)* :

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$, S est une matrice de symétrie ssi $S^2 = I$ ssi $S^{-1} = S$.

Si on sait en outre que $S \in O(n)$, on sait que $S^{-1} = {}^tS$.

Donc pour $S \in O(n)$, S est une matrice de symétrie ssi $S = {}^tS$ i.e. S est une *matrice symétrique*.

Conclusion : $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de sym. orthogonale ssi M est une matrice *orthogonale, symétrique*

(iv) Les deux conditions du (iii) se vérifient "à l'oeil nu" :

(l'orthogonalité de la matrice avec les normes et les p.s. des colonnes...)

Exemple : $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ est une matrice de symétrie orthogonale.

Révision : calcul de l'axe de symétrie (on cherche $\text{Fix}(f)$ où f can. associé à A , attention au $1/9$).

g) **Une autre façon d'obtenir la caractérisation matricielle ${}^tA.A = I$ des endo. orthogonaux :**

Dire que l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une isométrie s'écrit aussi : $\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^t(AX).AY = {}^tX.Y$.

Autrement dit $\forall (X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2, {}^tX.({}^tA.A).Y = {}^tX.Y$.

Savoir en déduire que ${}^tA.A = I_n$.

II Groupe orthogonal en dim 2

1) Dimension 1 :

Prop. Soit E un espace euclidien de dim. 1, $f \in O(E) \Leftrightarrow f = \pm \text{id}$.

2) Dimension 2 : étude matricielle

a) *Il est tout à fait possible de classer les isométries linéaires d'un plan vectoriel par des arguments géométriques. Ici, nous allons laisser les matrices faire le travail à notre place.*

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors $A \in O(2)$ si et seulement si, on a les trois conditions :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ c^2 + d^2 = 1 & (2) \\ ac + bd = 0 & (3) \end{cases}$$

Or $\begin{cases} (1) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, a = \cos(\theta), b = \sin(\theta) & (1') \\ (2) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R}, c = \cos(\varphi), d = \sin(\varphi) & (2') \end{cases}$

Avec (1) et (2), on a donc $(3) \Leftrightarrow \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi \equiv \theta + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ (3')

La congruence (3') donne *deux possibilités* modulo 2π , et l'on déduit de cette étude le résultat suivant :

c) **Théorème** – $A \in O(2) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

3) Interprétation géométrique du théorème matriciel

Soient $\mathcal{B}$ une b.o.n.d. de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Si $f \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ alors f est, par définition, la rotation vectorielle R_θ d'angle θ .

Remarque – Pour ceux qui trouvent bizarre de *définir* la notion de rotation à partir d'une écriture matricielle, on notera que R_θ est caractérisée par le fait que pour tout $u \in E$, on a $\begin{cases} \|R_\theta(u)\| = \|u\|, \text{ et} \\ (u, R_\theta(u)) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$.

(b) **Prop.** Si $f \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ alors $f = s_{D_{\theta/2}}$ la symétrie orthogonale d'axe la droite d'angle polaire $\theta/2$.

Terminologie – Dans un plan euclidien, une symétrie *orthogonale* par rapport à une droite s'appelle aussi une *réflexion*.

Preuve – (i) Notons $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$: A est une matrice orthogonale symétrique donc (cf. II 2), f))

f est une *symétrie orthogonale*. On détermine $\text{Fix}(f) : u \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifie $f(u) = u$ si, et seulement si

$$\begin{cases} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = x & (1) \\ \sin(\theta)x - \cos(\theta)y = y & (2) \end{cases}.$$

Ici, on sait que $\dim \text{Fix}(f) = 1$ (car les cas où $\text{Fix}(f)$ est un s.e.v. trivial i.e. $f = \pm \text{id}$ sont exclus par la forme de la matrice) Donc si l'équation (1) est non triviale, le système sera équivalent à (1).

Or (1) $\Leftrightarrow (\cos(\theta) - 1)x + \sin(\theta)y = 0$.

Considérons $u \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Or $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2(\theta/2)$ et $\sin(\theta) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$.

Donc $u \xleftrightarrow{\mathcal{B}} 2 \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.

Donc si $\theta/2 \neq 0[\pi]$ i.e si $\theta \neq 0[2\pi]$, l'équation (1) définit la droite $\mathbb{R}u_{\theta/2}$ où $u_{\theta/2}$ est le vecteur unitaire d'angle polaire $\theta/2$.

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, l'équation (1) devient $0 = 0$ mais (2) $\Leftrightarrow -y = y$ donc $y = 0$, donc $\text{Fix}(f) = \mathbb{R}u_0$ où $u_0 = e_1$ premier vecteur de la base $\mathcal{B}$. $\square$

4) Classification suivant le déterminant

a) **Prop.** – Soit E un plan euclidien et $f \in O(E)$: f est une rotation ssi $\det(f) = +1$ (*isométrie positive*) et f est une réflexion ssi $\det(f) = -1$ (*isométrie négative*).

Preuve – Soit $f \in O(E)$. Dans une base orthonormée f s'écrit sous la forme de l'une des deux matrices du 2) c). Le déterminant de f est celui de cette matrice. Le calcul est alors immédiat. $\square$

b) **Sens des mots isométries « positives » et « négatives »** : La formule clef du déterminant d'un endomorphisme vue au H2 dit que, pour E de dim. 2, $\mathcal{B}$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\forall (u, v) \in E^2, \det_{\mathcal{B}}(f(u), f(v)) = \det(f) \cdot \det_{\mathcal{B}}(u, v)$$

Or on a vu aussi au C2 (cf. aussi III ci-dessous) que le signe de $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ définit l'*orientation* de (u, v) par rapport à la base $\mathcal{B}$. Ainsi :

- les isométries positives f sont celles qui préservent l'orientation quand on passe de (u, v) à $(f(u), f(v))$
- les isométries négatives inversent l'orientation.

5) Compositions

a) Composition des rotations : le groupe des rotations

Soit E un plan euclidien. Par 4), $SO(E) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Prop. $(SO(E), \circ)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$.

b) De la redoutable efficacité du déterminant :

(i) Prop. la composée de deux réflexions (*isométries négatives*) est une rotation (*isométrie positive*).

(ii) Prop. la composée d'une réflexion *isom. négative* et d'une rotation *isom. positive* est une réflexion *isom. négative*.

(iii) Plus précis (rappel du C2, en version vectorielle) : $s_{D_2} \circ s_{D_1} = R_{2(\widehat{D_1, D_2})}$.

4) Exercice pour obtenir une classification en dim. 3 : sera du cours l'an prochain

a) Montrer que si E euclidien de dim. qcq. et $f \in O(E)$ et si F est un sev de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par f . *Exercice important en lui-même*

b) Soit E euclidien de dim. qcq. et $f \in O(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f : montrer que $\lambda = \pm 1$.

c) Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dim. 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ Montrer que le polynôme caractéristique $\lambda \mapsto \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \text{id} - f)$ a toujours une racine réelle, et donc que f a toujours une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc qu'il existe un s.e.v. $E_\lambda \neq \{0\}$ tel que $f|_{E_\lambda} = \lambda \text{id}$.

d) Dédurre de ce qui précède que si E est euclidien de dim. 3, et $f \in O(E)$ alors il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

Le cas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ correspond à la rotation d'axe dirigé par ε_1 et d'angle θ (liaison pivot).

III Application aux volumes, et retour sur l'orientation et sur Gram (culturel!)**1) Prop. déf. du volume n -dimensionnel :**

a) **Prop. (dém.)** Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. d'un espace euclidien alors $\det_{\mathcal{B}'} = \pm \det_{\mathcal{B}}$.
Déf. l'application $(u_1, \dots, u_n) \in E^n \mapsto |\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)| \in \mathbb{R}^+$ indép. de la b.o.n. $\mathcal{B}$ s'appelle *volume n -dimensionnel* du « parallélépipède n -dimensionnel » engendré par $(u_1, \dots, u_n)$.

b) Illustration sur le cas de la dim. 2 et de la dim. 3

(i) Le a) dit que pour $n = 2$, $|\det_{\mathcal{B}}(u, v)|$ renvoie l'aire du parallélogramme engendré par (u, v) , ce qu'on sait depuis le C2 avec la formule base $\times$ hauteur.

Néanmoins on va expliquer *pourquoi* le caractère *bilinéaire alterné* du déterminant permet de comprendre cette déf. de l'aire comme correspondant aux propriétés attendues de l'aire du parallélogramme.

(ii) La *bilinéarité* permet de ramener le calcul de l'aire d'un rectangle à celle du carré unité.

(iii) Le caractère *alterné* permet d'assurer l'invariance de l'aire le procédé de découpage et recollement qui transforme un parallélogramme en rectangle.

(iv) Illustration du même phénomène en dimension 3 avec le volume des parallélépipèdes et le découpage.

Le det. en b.o.n. est invariant par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt (fait général en toute dim.)

c) Notions d'orientation en dim. quelconque, de b.o.n.d, et de volume orienté :

(i) Déf. Si $\mathcal{B}_0$ est une base fixée d'un e.v. réel. et $\mathcal{B}$ une autre base. On dit que $\mathcal{B}$ est de *même orientation* que $\mathcal{B}_0$ ssi $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$.

(ii) Soit $\mathcal{B}_0$ une base fixée d'un e.v. réel. On dit qu'on définit une *orientation* sur E en décrétant que toute les bases $\mathcal{B}$ de même orientation que $\mathcal{B}_0$ sont *directes* (et les autres indirectes).

(iii) Si E est euclidien et $\mathcal{B}_0$ est une b.o.n. qui fixe une orientation de E alors pour toute autre b.o.n.d. $\mathcal{B}$ on a l'égalité :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}_0} : \text{cette FnLA indép. de la b.o.n.d. s'appelle alors le « volume orienté. »}$$

(iv) Vu au C2 et au II : le *signe* de $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$ donne l'orientation de (u, v) p.r. à $\mathcal{B}$ en terme d'angles orientés. Applications déjà vues, algorithme de Jarvis...

(v) Vu en physique/S.I. : en dim. 3 $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ traduit encore l'orientation de (u, v, w) par rapport à $\mathcal{B}$ (règles tire-bouchon ou autre).

(vi) Formule du produit mixte : si on fixe une b.o.n.d. $\mathcal{B}$ (on fixe une orientation), alors :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = ((u \wedge v)|w),$$

ainsi $(u \wedge v)$ est le vecteur représentant la forme linéaire $w \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ au sens du lemme de Riesz.

N.B. $\det_{\mathcal{B}}$ est indépendant du choix de la b.o.n. directe (i.e. de même orientation que $\mathcal{B}_0$), donc le produit vectoriel ne dépend que du choix du p.s. et de l'orientation (on dit de la structure euclidienne orientée).

d) Lien avec les isométries positives et négatives :

(i) La formule clef définissant le déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dim. n et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \cdot \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

(ii) Pour $f \in O(E)$ avec E euclidien, on obtient :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \pm \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Les isométries conservent les volumes.

(iii) Les $f \in SO(E)$ sont les isométries qui, en outre, conservent l'orientation donc le volume orienté.

2) Retour sur les matrices de Gram :

a) Le déterminant de Gram donne le carré du volume :

(i) Avec les notations de la fin du H2 : si $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille libre d'un espace euclidien E et $G(v_1, \dots, v_r) = ((v_i|v_j)) \in M_r(\mathbb{R})$ est sa matrice de Gram, alors la relation $G(v_1, \dots, v_r) = {}^t A \cdot A$ où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_r)$ avec $\mathcal{B}$ b.o.n. de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ entraîne que :

$$\det(G(v_1, \dots, v_r)) = \det(A)^2 = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_r)^2,$$

Le déterminant de Gram est le carré du volume r -dim. du parallélépipède déf. par $(v_1, \dots, v_r)$.

(ii) Si $r = 2$, on obtient la formule $\begin{vmatrix} \|v_1\|^2 & (v_1|v_2) \\ (v_1|v_2) & \|v_2\|^2 \end{vmatrix}$ pour le carré de l'aire du parallélogramme défini par (v_1, v_2) . Pourquoi est-ce « connu » ?

b) Thème de recherche (*non exigible !*) : montrer que la matrice de Gram $G(v_1, \dots, v_r)$ est un *invariant complet* pour l'action de $O(E)$ sur E^r ce qui signifie la chose suivante :

Soient $(u_1, \dots, u_r)$ et $(v_1, \dots, v_r)$ dans E^r . Montrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f(u_i) = v_i$ si, et seulement si, $G(u_1, \dots, u_r) = G(v_1, \dots, v_r)$.

On pourra comprendre au moins le cas $r = 1, r = 2 \dots$ et le sens facile...