# Chapitre H2 algèbre multilinéaire, déterminants

## I Introduction : déterminants $2 \times 2$ et $3 \times 3$

### 1) Forme bilinéaire antisymétrique, déterminant $2 \times 2$ :

#### a) En dimension quelconque :

(i) **Déf.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire (cf. H1).
On dit que $\varphi$ est *antisymétrique* si, et seulement si, $\forall\,(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) =$

(ii) **Déf.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.
On dit que $\varphi$ est *alternée* si, et seulement si, $\forall\, x \in E$, $\varphi(x,x) = 0$.

(iii) **Prop.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. (où $2.1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. Alors :
$\varphi$ est antisymétrique si, et seulement si, $\varphi$ est *alternée.*

*Preuve* – Sens $\Rightarrow$ :

Sens $\Leftarrow$ : On a $\varphi$ alternée. Soit $(x,y) \in E^2$, on veut montrer que $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.
*Une idée importante, on considère :*

□

(iv) **Abréviation :** On notera **F.B.A.** pour désigner une Forme Bilinéaire Alternée (ce qui entraîne toujours antisymétrique mais est plus fort si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

(v) **Prop.** L'ensemble des F.B.A. sur $E$, qu'on notera ici $\Lambda^2(E^*)$, est un $\mathbb{K}$-e.v.

#### b) Etude en coordonnées en dimension deux (comparer au H1, § I)

*Dans tout ce qui suit, $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. deux, et on fixe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $E$.*

(i) On considère $\varphi$ une F.B.A. de $E^2$ dans $\mathbb{K}$.
Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$, et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ deux éléments de $E$.
Alors par bilinéarité : $\varphi(x,y) = x_1y_1\varphi(e_1,e_1) + x_1y_2\varphi(e_1,e_2) + x_2y_1\varphi(e_2,e_1) + x_2y_2\varphi(e_2,e_2)$.
Mais comme $\varphi$ est alternée $\varphi(e_1,e_1) = \varphi(e_2,e_2) =$
Comme $\varphi$ est antisymétrique $\varphi(e_2,e_1) =$
On conclut que $\varphi(x,y) = (x_1y_2 - x_2y_1)\varphi(e_1,e_2)$.

(ii) **Déf. (connue)** Avec les notations du (i), on appelle *déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du couple* $(x,y)$ et on note $\det_{\mathcal{B}}(x,y)$ le nombre :

$$\det_{\mathcal{B}}(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 \overset{not.}{=} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

(iii) **Prop. (vérif. facile)** L'application $(x,y) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x,y)$ est une F.B.A.

(iv) **Prop. (Reformulation du (i))** Pour tout $(x,y) \in E^2$, et toute F.B.A. $\varphi : E^2 \to \mathbb{K}$ :

$$\varphi(x,y) = \det_{\mathcal{B}}(x,y)\varphi(e_1,e_2).$$

On peut réécrire ceci comme une *égalité de F.B.A* :

$$\boxed{\varphi = \varphi(e_1,e_2)\det_{\mathcal{B}}.}$$

(v) **Corollaire :** L'espace vectoriel $\Lambda^2(E^*)$ des F.B.A. est *de dimension*
Une F.B.A. $\varphi$ est entièrement déterminée par sa valeur $\varphi(e_1,e_2)$ sur une base $(e_1,e_2)$ de $E$. On notera $\varphi(\mathcal{B})$ si $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$.
On peut caractériser $\det_{\mathcal{B}}$ comme *l'unique* F.B.A. $\varphi$ telle que $\varphi(\mathcal{B}) = 1$.

**2) Forme trilinéaire alternée dans $E$ de dim. 3 et déterminant $3 \times 3$**

a) **Définitions (dim. qcq.)**

(i) **Déf.**$_1$ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. qcq. On dit qu'une application $\varphi : E^3 \to \mathbb{K}$ est une *forme trilinéaire* si, et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ , les trois applications partielles suivantes sont *linéaires* :

- $\varphi(\square, y, z) : u \in E \mapsto \varphi(u, y, z)$,
- $\varphi(x, \square, z) : u \in E \mapsto \varphi(x, u, z)$,
- $\varphi(x, y, \square) : u \in E \mapsto \varphi(x, y, u)$.

(ii) **Déf.**$_2$ Avec les notations du (i), on dit que $\varphi$ est *antisymétrique* si, et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a les trois propriétés suivantes :
$\varphi(y, x, z) = -\varphi(x, y, z)$,
$\varphi(x, z, y) = -\varphi(x, y, z)$,
$\varphi(z, y, x) = -\varphi(x, y, z)$.

(iii) **Rappel de terminologie :** Pour un ensemble à trois éléments $\{a_1, a_2, a_3\}$, les trois bijections de cet ensemble qui échangent deux éléments et qui fixent le troisième sont appelées des *transpositions.*

On peut donc traduire le (ii) en disant de manière un peu vague ici, mais nous y reviendrons plus loin, que toute *transposition* de l'ensemble des trois entrées échange le signe de $\varphi(x, y, z)$.

(iv) **Prop. (invariance par permutation circulaire) :** Si $\varphi$ est une forme trilinéaire antisymétrique, alors pour tout $(x, y, z) \in E^3$, on a :
$\varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x) = \varphi(z, x, y)$.

*Preuve : Faire deux transpositions !*

(v) **Déf.**$_3$ On dit qu'une forme trilinéaire $\varphi : E^3 \to \mathbb{K}$ est alternée si, et seulement si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $\varphi(x, x, z) = 0$, $\varphi(x, y, x) = 0$, $\varphi(x, y, y) = 0$.
*Autrement dit $\varphi$ est* alternée *ssi $\varphi(x, y, z) = 0$ dès que deux des entrées sont égales.*

(vi) **Prop.** – Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. (avec toujours le N.B sur $2.1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$). Soit $\varphi : E^3 \to \mathbb{K}$ une forme trilinéaire. Alors : $\varphi$ est alternée si, et seulement si $\varphi$ est antisymétrique.

*Preuve : La même que pour les formes bilinéaires.* $\square$

On abrégera en **F.T.A.** pour forme trilinéaire alternée :

(vii) On notera $\Lambda^3(E*)$ l'e.v. des F.T.A. sur $E$.

**b) Image d'une famille $(u, v, w)$ liée.**

(i) **Prop.** Si $\varphi$ est une F.T.A. sur un e.v. $E$ et $(u, v, w) \in E^3$ est une famille liée, alors $\varphi(u, v, w) =$

(ii) *Preuve :* S.R.d.G. on peut supposer que $w = \lambda u + \mu v$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Alors $\varphi(u, v, w) =$

(iii) **Cor.** Une F.T.A sur un e.v. E de dim. 2 est toujours

**N.B. :** *Désormais, on suppose que $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. 3*

**c) Expression d'une F.T.A. qcq dans une base en dim. 3 :**

On considère donc $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. trois et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$.

On considère trois vecteurs $(u, v, w) \in E^3$ et on note $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, et $w = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$.

(i) *Si on développe $\varphi(u, v, w)$ par linéarité par rapport à la première entrée :*

$\varphi(u, v, w) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, v, w) = x_1\varphi(e_1, v, w) + x_2\varphi(e_2, v, w) + x_3\varphi(e_3, v, w)$.

(ii) *Pour chacun des trois termes trouvés, on le développe par linéarité p.r. à la seconde entrée :*

$$\begin{array}{rcl} \bullet\ \varphi(e_1,v,w) & = & \varphi(e_1, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, w) \\ & = & y_1\varphi(e_1,e_1,w) + y_2\varphi(e_1,e_2,w) + y_3\varphi(e_1,e_3,w) \\ & = & y_2\varphi(e_1,e_2,w) + y_3\varphi(e_1,e_3,w) \quad \text{par caractère alterné.} \\ \bullet\ \varphi(e_2,v,w) & = & \varphi(e_2, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, w) \\ & = & y_1\varphi(e_2,e_1,w) + y_3\varphi(e_2,e_3,w). \\ \bullet\ \varphi(e_3,v,w) & = & \varphi(e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, w) \\ & = & y_1\varphi(e_3,e_1,w) + y_2\varphi(e_3,e_2,w). \end{array}$$

(iii) *Ainsi avec les trois expressions du (ii) dans celle du (i), on obtient six termes :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(u,v,w) & = & x_1y_2\varphi(e_1,e_2,w) + x_1y_3\varphi(e_1,e_3,w) \\ & + & x_2y_1\varphi(e_2,e_1,w) + x_2y_3\varphi(e_2,e_3,w) \\ & + & x_3y_1\varphi(e_3,e_1,w) + x_3y_2\varphi(e_3,e_2,w). \end{array}$$

(iv) *Dans chacun des six termes du (iii), on va utiliser l'écriture de $w$ dans la base $\mathcal{B}$. Mais là le caractère alterné va simplifier les choses :*

En effet, en détaillant le calcul pour le premier terme, puis en utilisant l'effet des transpositions et permutations circulaires, chaque terme va s'exprimer en fonction de $\varphi(e_1,e_2,e_3)$, précisément :

$$\begin{array}{rcl} \bullet\ \varphi(e_1,e_2,w) & = & \varphi(e_1,e_2,z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3) \\ & = & z_1\varphi(e_1,e_2,e_1) + z_2\varphi(e_1,e_2,e_2) + z_3\varphi(e_1,e_2,e_3). \\ & = & z_3\,\varphi(e_1,e_2,e_3) \quad \text{par caractère alterné.} \\ \bullet\ \varphi(e_1,e_3,w) & = & z_2\varphi(e_1,e_3,e_2) = -z_2\varphi(e_1,e_2,e_3). \\ \bullet\ \varphi(e_2,e_1,w) & = & \\ \bullet\ \varphi(e_2,e_3,w) & = & \\ \bullet\ \varphi(e_3,e_1,w) & = & \\ \bullet\ \varphi(e_3,e_2,w) & = & \end{array}$$

(v) *On obtient donc finalement l'expression en coordonnées cherchée :*

$$\boxed{\varphi(u,v,w) = \big(x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1\big)\,\varphi(e_1,e_2,e_3).}$$

**d) Définition et premier calcul du déterminant dans une base :**

*On considère toujours que $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$.*

(i) **Déf. :** A partir de l'expression obtenue en c) (v), on déduit qu'il existe une F.T.A. $\varphi$ sur $E$ telle que $\varphi(e_1,e_2,e_3) = 1$. Par déf. $\varphi$ s'appelle *déterminant dans la base* $\mathcal{B}$ et on note $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$.

(ii) En coordonnées, on a : $\det_{\mathcal{B}}(u,v,w) = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$.
*Pour l'instant, ce n'est pas très parlant, mais on va voir comment retenir cette formule.*

(iii) Avec la déf. précédente, le résultat du c) (v) devient donc, en notant $\Lambda^3(E^*)$ l'e.v. des F.T.A. sur $E$ :

**Prop. :** $\forall\,\varphi \in \Lambda^3(E^*)$, $\forall\,(u,v,w) \in E^3$, $\varphi(u,v,w) = \det_{\mathcal{B}}(u,v,w).\varphi(\mathcal{B})$,
où on a noté $\varphi(\mathcal{B}) = \varphi(e_1,e_2,e_3)$.
On peut encore écrire ceci comme égalité de F.T.A. :

$$\forall\,\varphi\ \in \Lambda^3(E^*),\ \varphi = \varphi(\mathcal{B}).\det_{\mathcal{B}}.$$

(iv) Notation : en gardant les notations précédentes, on note aussi :

$\det_{\mathcal{B}}(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Comment on retient la formule donnant le déterminant en coordonnées donnée au (ii) : *retenir +,-,+ dans la première colonne et à chaque terme on cache la ligne et la colonne...*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

**e) Formules de calcul des déterminants** $3 \times 3$

(i) Développement par rapport à n'importe quelle colonne (choix de celle qui a des zéros).

(ii) Calcul explicite avec six produits : "règle de Sarrus", pour exemples numériques. *Cf.paragraphe suivant* : les six termes correspondent aux six permutations de $\{1,2,3\}$ et règles des signes.

(iii) Déterminant d'une matrice $A$ : $\det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, C_3)$ où $\mathcal{B}$ base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

Avec la forme du dév. dans Sarrus : égalité $\det(A) = \det({}^tA)$.

(iv) Conséquence : $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(L_1, L_2, L_3)$, caractère trilinéaire alterné par rapport au lignes : toutes les opérations de type pivot sur les lignes. Développement par rapport à une ligne.

(v) Calcul du déterminant par opérations de type pivot de Gauss sur ligne et/ou colonnes :

Le caractère trilinéaire alterné dit que :

- $\det(C_1, C_2, C_3)$ ne change pas via $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ pour $j \neq i$. De même avec les lignes.
- L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant par $\lambda$
- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ change le signe du déterminant.

Intérêt du pivot de Gauss : : obtenir une expression factorisée et avoir la CNS d'annulation du déterminant.

(vi) Exemples : Vandermonde et $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (Comparaison Sarrus /pivot)

A chaque étape, regarder si factorisations possibles dans *chaque* ligne ou colonne.

**f) Exemple introductif aux déterminants** $4 \times 4$

*Toutes les propriétés précédentes se généralisent. Même règle des signes pour le développement. Mêmes possibilités d'opérations de type pivot. MAIS Pas de Sarrus !!!*

Exemple : expression factorisée de $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

## II Le groupe symétrique :

### 1) Définitions et premières propriétés :

**a)** (i) **Rappels :** si $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ est un ensemble à $n$ éléments (ce qui signifie que les $a_i$ sont tous *distincts*), et qu'on note $\mathrm{Bij}(E)$ l'ensemble des bijections de $E$ dans $E$, on sait que :

- $\mathrm{Bij}(E)$ a exactement $n!$ éléments, appelées *permutations* de $E$, cf. chap. J1.
- $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est un groupe (non commutatif dès que $n \geq 3$), cf. chap.

(ii) **Définition du groupe symétrique :**

**Déf.** Si $E = [\![1, n]\!] = \{1, 2, \dots, n\}$ : le groupe $(\mathrm{Bij}(E), \circ)$ est noté $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ ou $(S_n, \circ)$ et s'appelle *le (n-ième) groupe symétrique.*

**Scholie :** Du point de vue de la théorie des groupes, on "identifie" deux groupes isomorphes. Il se trouve que si on change d'ensemble $E$ à $n$ éléments, on obtient un groupe isomorphe, donc $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ pourra aussi désigner $\mathrm{Bij}(E)$ pour un autre choix de $E$ à $n$ éléments.

b) **Illustrations pour de petites valeurs de** $n$ **(rappels) :**

(i) Cas $n = 2$, $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ où $\tau : \begin{cases} 1 \to 2, \\ 2 \ \to 1. \end{cases}$ .

Pour ce qui est de sa structure de groupe, on a la table d'opération

| $\circ$ | id | $\tau$ |
|---|---|---|
| id | | |
| $\tau$ | | |

.

Comme groupe, $(\mathfrak{S}_2, \circ)$ est isomorphe à ou encore à

Mieux encore, exercice : tous les

(ii) Cas $n = 3$, $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{id}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}, \sigma_1, \sigma_2\}$.
Où $\sigma_1 : \begin{cases} 1 \to 2, \\ 2 \to 3, \\ 3 \to 1. \end{cases}$, $\sigma_2 : \begin{cases} 1 \to 3, \\ 3 \to 2, \\ 2 \to 1. \end{cases}$ sont appelées

et $\tau_{1,2} : \begin{cases} 1 \to 2, \\ 2 \to 1, \\ 3 \to 3. \end{cases}$ et ses deux soeurs sont appelées

(iii) Calculs dans $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ :

• On calcule $\sigma_1^2 \overset{def}{=} \sigma_1 \circ \sigma_1 =$ puis $\sigma_1^3 =$
Une fois qu'on sait que $\sigma_1^3 = \mathrm{id}$, la suite des puissances $\sigma_1^k$ est claire.

• On calcule par exemple $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} =$
On calcule d'autre part $\tau_{1,3} \circ \tau_{1,2} =$
On conclut que le groupe $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ n'est pas :

**Exercice** $(*)$ **:** C'est en quelque sorte le plus petit groupe non on peut démontrer que tous les groupes de cardinal plus petit ou égal à cinq sont commutatifs. Pour cela il faut déjà savoir démontrer que si $H$ est un sous-groupe de $G$ alors $\mathrm{Card}(H)$ divise $\mathrm{Card}(G)$ (théorème de Lagrange).

(iv) Notation possible pour les permutations : tableau à deux lignes $\binom{1 \quad 2 \ \dots \ n}{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)}$. Par exple $\sigma_1 = \binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$ ou $\tau_{1,2} = \binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$

**c) Permutations particulières, orbites, cycles.**

(i) Déf. $\mathrm{Orb}(x) = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Exemple des orbites de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 9 & 3 & 2 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Dessins circulaires.

(iii) Prop. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k(x) = x$. Si on prend $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ \sigma^k(x) = x\}$ alors $\mathrm{Orb}(x)$ est de cardinal $p$ et est égale à $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$.

*Preuve* – Comme l'orbite est un ensemble fini, il existe deux entiers $i < j$ tels que $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$ et $k = j - i$ convient. En outre, avec la déf. de $p$, on déduit de même qu'il n'existe pas de couple $(i, j)$ avec $i < j$ dans $[\![0, p-1]\!]$ tels que $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$ ce qui donne la deuxième partie de l'énoncé. □

(iv) Conséquence : l'application $k \mapsto \sigma^k(x)$ est $p$-périodique.
On a aussi : $\mathrm{Orb}(x) = \{\sigma^k(x),\ k \in \ \mathbb{Z}\}$.
(v) Conséquence : $y \in \mathrm{Orb}(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Orb}(y)$ et dans ce cas $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$.
Ainsi ou bien $\mathrm{Orb}(x) = \mathrm{Orb}(y)$ ou bien $\mathrm{Orb}(x) \cap \mathrm{Orb}(y) = \varnothing$.
(vi) Déf. : $\sigma$ permutation circulaire ssi $\sigma$ possède une seule orbite.
(vi) Déf. cycle d'ordre $k$. Cas particulier : les transpositions.
Support d'un cycle.
Notation condensée pour les cycles. Dans $\mathfrak{S}_7$, on note $(1342)$ pour $\binom{1234567}{3142567}$.

**2) Décomposition d'une permutation en permutations plus simples :**

**a) Décomposition en produit de cycles à supports disjoints :**

(i) Etude sur un exemple.
(ii) L'essentiel : Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qcq, sur chacune de ses orbites $\Omega_i$, $\sigma_{|\Omega_i}$ est une permutation circulaire.
(iii) Prop. générale. Décomposition unique à l'ordre près, commutative.

**b) Décomposition en transpositions :**

(i) Exemple des produits $(13)(12) \neq (12)(13)$ donnent deux cycles d'ordre 3.

(ii) Prop. (*dém.*) Tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme une composée (d'au plus $n-1$) transpositions.

Il n'y pas unicité : contre-exemple dans $\mathfrak{S}_3$.

Exercice : on peut décomposer en (un nbre évent. plus grand) de transpositions seulement du type $(1\,i)$.

**3) Signature d'une permutation :**

**a) Définition :**

(i) En notant $o(\sigma)$ pour le nombre d'orbites de $\sigma$. Si $\tau \in \mathfrak{S}_n$ transposition $o(\tau) = n-1$.

(ii) Déf. $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-o(\sigma)}$. Cas des transpositions ; $\varepsilon(\tau) = -1$.

**b) Thm. : une autre façon de voir la signature**

(i) Thm. : $\varepsilon$ morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1,1\}, \times)$.

(ii) Cor. $\varepsilon(\sigma)$ donne la parité du nombre de transpositions dans une déc. de $\sigma$ (indép. de la déc.).

Permutations paires ou impaires.

(iii) Preuve : lemme clef : comparaison des orbites de $\sigma$ et $\sigma \circ \tau$. (*peut être admis*).

**c) Groupe alterné : $\mathfrak{A}_n$.**

(i) Déf. $\mathfrak{A}_n = \ker \varepsilon$, sous-groupe de permutations paires.

(ii) Si $I_n = \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$ : bijection entre $I_n$ et $\mathfrak{A}_n$. Cor. : $\mathrm{Card}(\mathfrak{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

**III Formes n-linéaires alternées (d'un espace $E$ de dim. $n$), déterminant de $n$ vecteurs :**

**1) Formes $k$-linéaires alternées pour $k$ qcq :**

**a) Définitions**

Si $E$ est un $\mathbb{K}$-ev, déf. forme $k$-linéaire : $E^k \to \mathbb{K}$, forme alternée, forme antisymétrique.

Abus de notation : $\varphi$ antisymétrique ssi "$\varphi \circ \tau_{i,j}$" $= -\varphi$ ssi $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \varphi \circ \sigma = \varepsilon(\sigma)\varphi$.

Si dans $\mathbb{K}$, on a $2 \neq 0$, alternée équivaut à antisymétrique (sinon : alterné entraine toujours antisymétrique).

*Dans toute la suite on notera F.n.L.A. pour dire Forme n Linéaire* Alternée*, sous cette condition de dire* alternée*, la théorie s'applique même si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui peut être utile pour des arguments de parité.*

**b) Prop. immédiates**

(i) Si $\varphi$ est $k$-linéaire et l'un des $v_i = 0_E$, alors $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$.

(ii) Si $\varphi$ FkLA alors $\varphi(v_1, \dots, v_k)$ invariant par $v_i \leftarrow v_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j v_j$.

(iii) Si $v_1, \dots, v_k$ liée alors $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$. Donc si $k > \dim E$ pas de FkLA non nulle.

Dans toute la suite, on ne s'intéresse qu'aux formes $n$-lin. alternées où $n = \dim E$.

**2) Expression d'une FnLA dans une base de $E$**

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ : $v_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$, obtention de l'écriture :

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}\Big)\, \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Cor. une FnLA $\varphi$ est entièrement déterminée par la donnée de $\varphi(e_1, \dots, e_n)$.

**3) Le déterminant et l'espace vectoriel $\Lambda^n(E^*)$ des FnLA :**

**a) Prop. :** Réciproque du 2) : l'application $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}$ est bien une FnLA. et vaut 1 sur $(e_1, \dots, e_n)$.

**b) Prop.-déf.** L'application du a) est l'unique FnLA $\varphi$ telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Elle s'appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et se note : $\det_{\mathcal{B}}$.

**c)** (i) En notant $\Lambda^n(E^*)$ l'e.v. des FnLA sur $E$, la formule du 2) entraîne alors :

$$\forall \varphi \in \Lambda^n(E^*),\ \varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}} = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

(ii) En particulier, pour $\varphi = \det_{\mathcal{B}'}$, où $\mathcal{B}'$ est une autre base, on a la **formule de changement de base** :

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

(iii) Le (i) dit aussi que, pour $E$ de dim. $n$, $\Lambda^n(E^*)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim 1.

**d) Conséquence du c) (ii) :**

**Prop.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. $n$ et $\mathcal{B}$ une base de $E$. Une famille de $n$ vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. $n$ est libre si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

## IV Calculs de déterminants $n \times n$

### 1) Notion de déterminant d'une matrice : déterminant des colonnes

a) **Déf.** Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

b) Attention aux prop. algébriques : si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, et pas de formule pour $\det(A+B)$.

L'application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *n'est pas* linéaire !

c) Déterminant de matrices particulières :

• Si $A$ est diagonale de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\det(A) =$

• Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, ses colonnes sont libres, donc : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

**d) Avec l'expression combinatoire** $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ $(\dagger)$.

Prop. (*dém.*) $\det({}^tA) = \det(A)$. Appl. prop. opérations sur les lignes.

### 2) Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

**a) Un premier calcul fondamental :**

(i) si dans la première colonne seul $a_{1,1} \neq 0$ : avec formule $(\dagger)$.

(ii) Conséq. dét. des matrices triangulaires (et en part. diagonales, scalaires...)

**b) Quelques définitions :**

*Mineur* $\Delta_{i,j}$ : déterminant obtenu en enlevant $L_i$ et $C_j$. *Cofacteur* $\widehat{a_{i,j}} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

*Comatrice de* $A$ : matrice des cofacteurs. Notation $Com(A)$ ou $\widehat{A}$. Exple si $A \in M_2(\mathbb{K})$.

**c) Développement par rapport à une colonne :**

(i) Développement par rapport à la première colonne.

(ii) Développement par rapport à une colonne $j$ qcq. Formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \widehat{a_{k,j}}$. (*Dém. non exigée*)

**d) Développement par rapport à une ligne :** Même formule attention aux variables muettes/ et non muettes.

Intérêt pratique : choix de la LI ou CO avec le plus de zéros.

**d) Exercice : exemple du déterminant tridiagonal**

(i) Obtention de la relation de réc. $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$

(ii) Si les diagonales ne sont pas constantes, même méthode.

### 3) L'exemple du déterminant de Vandermonde :

**a)** $\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$ **attention à l'ordre !.**

**b)** Preuve par opération sur les lignes et les colonnes : attention à l'ordre des opérations.

**c)** Preuve où les polynômes font la factorisation pour nous.

### 4) Déterminants se ramenant à un Vandermonde :

a) Exple : Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 x_3 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}$.

b) *Avec des C.L.* Si $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ est une famille de polynômes unitaires avec $\deg(P_i) = i$ et $A = (P_i(a_j))_{(i,j) \in [\![0,n-1]\!] \times [\![1,n]\!]}$ alors $\det(A) = V(a_1, \dots, a_n)$.

## V Déterminant d'un endomorphisme :

### 1) Le problème de la définition du déterminant d'un endomorphisme :

**a) Idée :** Si $f \in \mathcal{L}(E)$ on voudrait définir, $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ i.e. $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$.

*Quel est le problème que pose cette définition ? Quand a-t-on déjà rencontré ce problème ?*

**b) Comment on va résoudre ce problème ici :**

(i) Idée : « composer det et $f$ » i.e pour notre base $\mathcal{B}$ fixée considérer l'application :

$$\varphi : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

Par construction $\varphi$ est une FnLA et la formule du III 3) c) donne alors que :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \varphi(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Mais $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ par définition du déterminant de la matrice. D'où la formule importante :

$$\boxed{\forall\,(u_1, \ldots, u_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).}$$

**Scholie :** *Cette formule dit que* $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ *est ce qui « sort » du déterminant, quand on veut « sortir* $f$ *» de* $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n))$.

(ii) **Application du (i) à l'indépendance par rapport aux choix des bases :**
Si $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une autre base de $E$, alors pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) &= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det_{\mathcal{C}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)), \text{par la formule de chgt. de base du III 3)},\\ &= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)) \det_{\mathcal{C}}(u_1, \ldots, u_n) \quad \text{formule du (i) avec la base } \mathcal{C},\\ &= \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n), \quad \text{par la formule de chgt. de base du III 3)}. \end{aligned}$$

(iii) En comparant les deux formules à la fin du (i) et du (ii), on obtient enfin :

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)).$$

On a prouvé le :

**Théorème définition du déterminant d'un endomorphisme :** Si $f \in \mathcal{L}(E)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim $n$. Alors :
(C1) Le nombre $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ est *indépendant du choix de la base* $\mathcal{B}$ *choisie*. Comme il ne dépend que de $f$, on l'appelle $\det(f)$ (sans référence à une base).
(C2) On a l'importante formule suivante : dans toute base $\mathcal{B}$ :

$$\forall\,(u_1, \ldots, u_n) \in E^n,\ \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

d) **Scholie :** *Lien avec l'idée de volume.* En gardant à l'idée, que, au moins dans le cadre euclidien, on définit le volume orienté comme le déterminant en b.o.n.d., la formule de la (C2), signifie que : *le déterminant d'un endomorphisme dit comment celui-ci dilate ou rétrécit les volumes des parallélépipèdes..*

**2) Applications : propriétés pour la composition :**

**a)** $\boxed{\text{(i) Prop. } \forall\,(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \det(f \circ g) = \det(f).\det(g) = \det(g \circ f).}$

*Preuve :* On choisit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ et on applique la formule du théorème-déf. du déterminant d'un endomorphisme à $(u_1, \ldots, u_n) = (g(e_1), \ldots, g(e_n))$, ce qui donne :

$$\det_{\mathcal{B}}\left(f(g(e_1)), \ldots, f(g(e_n))\right) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(g(e_1), \ldots, g(e_n)).$$

Par déf. du déterminant d'un endomorphisme, on a alors : $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$. □

$\boxed{\text{(ii) Corollaire : } \forall\,(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2,\ \det(A \times B) = \det(A) \det(B).}$

(iii) Remarque 1 : on retrouve immédiatement la caract. $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
Remarque 2 : essayez de montrer ce résultat « directement » avec la formule du produit de matrice et celle du déterminant ! !

**b)** (i) Corollaire : det : $(GL(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ (resp. de $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$) est un *morphisme de groupes*.

(ii) En particulier $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

**c) Le groupe spécial linéaire $(SL(E), \circ)$ :**
(i) **Déf.** $SL(E) = \{f \in \mathcal{L}(E), \det(f) = 1\}$, $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 1\}$.
(ii) **Prop.** $SL(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.
De même $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$.
(iii) **Interprétation géométrique :** D'après le théorème-déf. du déterminant d'un endomorphisme, les endomorphismes dans $SL(E)$ sont exactement ceux qui préservent les *volumes orientés*.

**3) Synthèses et complément sur le déterminant d'une matrice :**
**a) Trois façons de voir le déterminant d'une matrice**
(i) $\det(A)$=déterminant des vecteurs colonnes,
(ii) expression combinatoire $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ (†).
(iii) mais aussi par l'action géométrique de $A$ : $\det A = \det(u)$ si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$,

**b) Exemple d'utilisation des différents point de vue :**
Avec a) (i) : pivots.
Avec a) (ii) formule $\det(A) = \det({}^tA)$.
Avec a) (iii) la formule : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ou encore deux matrices *semblables* ont même déterminant.

**VI Application des déterminants**

**1) Inverse de matrice**
**a)** Cas des matrices $2 \times 2$, la formule connue : $A^{-1} = \dfrac{{}^t\widehat{A}}{\det(A)}$ (à retenir plus concrètement).
**b)** Généralisation en dim. qcq. :
Prop. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\det A \neq 0$, la formule du a) donne encore $A^{-1}$.
*Mieux*, pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, ${}^t\widehat{A}A = A\,{}^t\widehat{A} = (\det A)I_n$.
**c)** Rappel : si $n \geq 3$ intérêt plus théorique que pratique de ces formules (la bonne méthode pour calculer l'inverse, c'est le pivot).
Exemple d'exercice d'application : $A \in M_n(\mathbb{Z})$ admet un inverse dans $M_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$.
**d)** Exercice important : rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de $\mathrm{rg}(A)$.

**2) Systèmes de Cramer**
**a) Définition et caractérisation par le déterminant**
(i) Un système de $n$ éq. à $n$ inconnues : $AX = Y$ est de Cramer ssi unique sol ssi $\det(A) \neq 0$.
(ii) Utile cas SSM $Y = 0$ : $AX = 0$ admet une sol. non nulle ssi $\det A = 0$.

**b) Formules de Cramer :**
Prop. Pour $A = [C_1 \dots C_n]$ on note $A_i = [C_1 \dots Y \dots C_n]$ avec $Y$ en i-ème colonne.
Alors $x_i = \det(A_i)/\det(A)$.
Pv 1 : avec la formule de la comatrice.
Pv. 2 : idée traduction du système en équation sur les vecteurs colonnes $C_1x_1 + \cdots + C_nx_n = Y$.

**3) Valeurs propres et polynôme caractéristique (introduction..)**
**a) Définitions : vecteurs propres, valeurs propre**
**b) Intérêt pour la diagonalisation**
**c) Méthode de recherche des valeurs propres :** $\lambda$ est valeur propre de $f$ ssi $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$ ssi $\det(f - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$.
**d) Le héros :** le polynôme caractéristique $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{id} - f)$.
On note aussi $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.
**Prop.** $\chi_f$ est un polynôme unitaire de degré $n$.
*Démonstration importante*

**4) En géométrie euclidienne : les déterminants de Gram cf. H3**
a) Idée essentielle pour Gram :
si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_r) \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{B}$ b.o.n., alors $\forall\,(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$, $(v_i|v_j) = ({}^tA.A)_{i,j}$.
b) Déf. matrice de Gram $G = ((v_i|v_j)) \in M_r(\mathbb{R})$, le déterminant de Gram est nul ssi $(v_1, \dots, v_r)$ liée, et strictement positif sinon. On verra au H3 que ce déterminant représente le volume $r$-dimensionnel du parallélépipède engendré par $(v_1, \dots, v_r)$.